Logaritmefunktioner

Man kan definere logaritmefunktioner med et givet grundtal, som skal være et positivt tal.
Vi vil her 'nøjes' med at se på logaritmefunktioner med grundtal 10 (titalslogaritmefunktionen) og med grundtal e (den naturlige logaritmefunktion).

$\log_a(x)$ betyder logaritmefunktionen med grundtal a, taget i tallet x.
$\log_{10}(x)$ skrives normalt blot $\boxed{\log(x)}$ og $\log_e(x)$ skrives normalt som $\boxed{\ln(x)}$
Dette er velkendt fra lommeregneren TI-89.

Alle logaritmefunktioner er *proportionale*, dvs. de adskiller sig alene ved en faktor: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Logaritmefunktionen har en eksponentialfunktion som omvendt funktion: $\left(\log_a\right)^{-1} = a^x$

Tidligere (før lommeregnere og PC'er) var logaritmefunktionerne særdelse anvendt til beregninger.
Som teknisk hjælpemiddel brugte man tidligere den såkaldte *regnestok*, som var baseret på logaritmefunktionernes regneregler.

Regneregler

$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a(x)$	$\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \log_a(x)$
$\left(\log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \dfrac{1}{x}$	*specielt:* $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$ og $\left(\log(x)\right)' = \dfrac{1}{\ln(10)} \cdot \dfrac{1}{x}$

Disse regler får man af og til brug for, når man skal løse ligninger eksakt.
Så bruger man reglerne til at lave nogle omskrivninger af udtryk.
Ligeledes kan man anvende logaritmefunktion til at løse en variable, der står som eksponent.

Eksempler:

$\log(2) + \log(x) = 2 \quad \Leftrightarrow$ $\log(2 \cdot x) = 2 \quad \Leftrightarrow$ $2 \cdot x = 10^2 \quad \Leftrightarrow$ $x = \dfrac{10^2}{2} = \dfrac{100}{2} = \underline{\underline{50}}$	*Her har vi brugt at:* • $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ • titalslogaritmefunktionens omvendte funktion er 10^x *TI-89 klarer den således:* solve(log(2)+log(x)=2,x) ↵ og det giver $\underline{\underline{50}}$

$5 \cdot 2^x = 300 \quad \Leftrightarrow$ $2^x = 60 \quad \Leftrightarrow$ $\log(2^x) = \log(60) \quad \Leftrightarrow$ $x \cdot \log(2) = \log(60) \quad \Leftrightarrow$ $x = \underline{\underline{\dfrac{\log(60)}{\log(2)}}}$	*Her har vi brugt at:* • $\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a(x)$ *TI-89 klarer den således:* solve(5*2^x=300,x) ↵ og det giver $\underline{\underline{\dfrac{\ln(60)}{\ln(2)}}}$, som er det samme, idet logaritmefunktionerne er proportionale!

Opgaver:

Løs følgende opgaver med hånd/hjerne-kraft og med TI-89.

$\log(x^2) = 1$	$\ln(x^4) - \ln(x^2) = 2$
$2^x \cdot 4^x = 100$	$\dfrac{10^x}{2^x} = 20$
$\left(\log(x)\right)^2 - 2 \cdot \log(x) + 1 = 0$	$\log(x) + 3 \cdot \ln(x) = 12$