Skriver man

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \quad , n = 1, 2,3,...$$

taler man om en talfølge, eller blot en følge.
Andre eksempler på følger er

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n+1}, ..., \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$1, 2, 3, 4, ..., n, ..., \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

$$1, \ -\frac{1}{4}, \ \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ ..., \ \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ ... \ , \ n = 1, \ 2, \ 3, \ ...$$

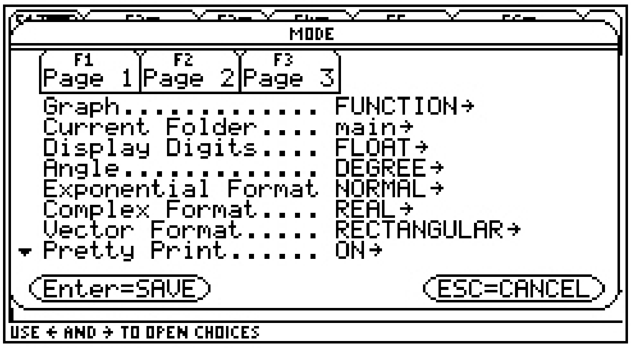
Den almene form af en følge er

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

og man kan opfatte en talfølge som en funktion af de naturlige tal[1] ind i de reelle tal. Den almindelige funktioneditor i TI-89, kan ikke tegne grafen for en følge.

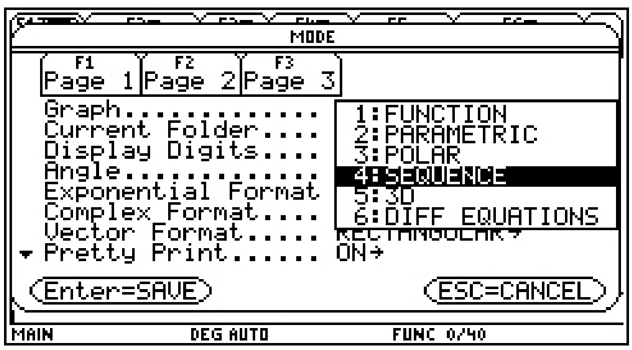
Til det formål skal man gå ind i MODE, fig.1,

fig.1



og vælge SEQUENCE, fig.2

fig.2

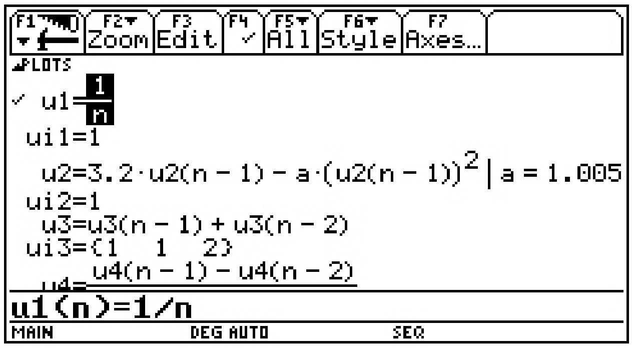


---

[1] Man kan opfatte en talfølge som en funktion af de naturlige tal ind i de reelle tal. En gang i mellem regnes 0 til de naturlige tal, til tider ikke. Vi vil ikke her gå ind i en længere overvejelse om dette, men tillade 0 at være med når det passer os, og ikke med når det ikke passer os. I tvivlstilfælde nævnes det udtrykkeligt om 0 er med eller ej

Når man så går ind i "y="-editoren ser skærmen ud som på fig.3

fig.3



I eksemplet på fig.3 er følgen

$$a_n = \frac{1}{n}$$

indtastet, med begyndelsesbetingelsen

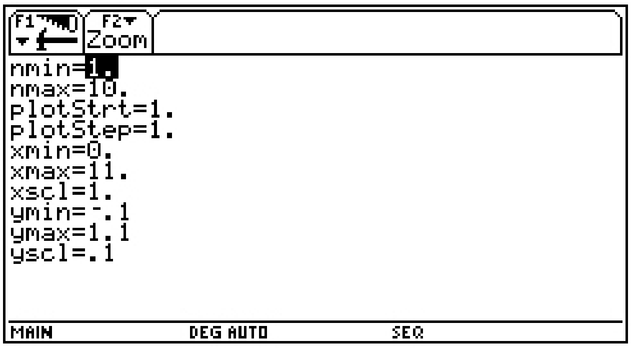
$$a_1 = 1$$

Man ser at *Texas Instruments* har valgt betegnelsen u1, u2, u3, osv. Tallene 1, 2, 3, osv. efter u betyder at det er første følge, anden følge, tredie følge, osv., ligesom skrivemåden for funktioner (y1, y2, osv.).
Nedenunder u1 står ui1: i'et står for "initial" altså "begyndelses-". På fig.3 er ui1=1. Det betyder at begyndelsesværdien for følgen er sat til 1 og er altså det samme som

$$a_1 = 1$$

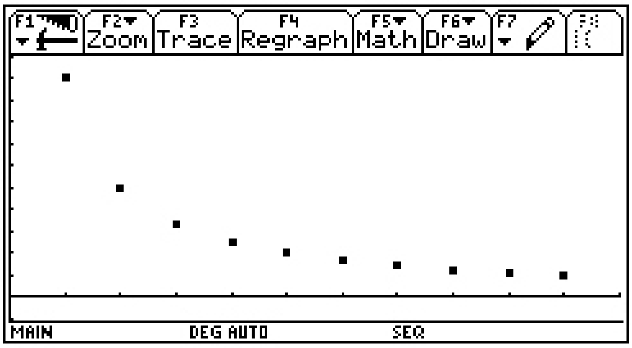
Ønsker man at se grafen følger man blot den normale procedure:
Gå ind i F2 og sæt parametrene som vist på fig.4
(eller vælg zoomfit)

fig.4



Resultatet ses på fig.5:

fig.5



I forbindelse med rækker er man ofte interesseret i at finde ud af om man kan finde summen af dens elementer, altså at finde en uendelig sum. Man skriver da

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Skal man fx finde summen af de seks første tal

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

kan man naturligvis blot lægge dem sammen i hovedet, eller bruge en lommeregner. Anderledes forholder det sig hvis det er summen af de 600 eller 6000 første tal som skal findes. Det er ganske vist muligt at lægge tallene sammen i hovedet eller ved at bruge en lommeregner, men det vil tage et pænt stykke tid. Så derfor vil vi se på om ikke der skulle være en genvej.
Ved at skrive 1+2+3+4+5+6 på en anderledes måde ses, at det er der:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \quad = \quad (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = \quad 7 + 7 + 7 \quad = \quad 3 \cdot 7 \quad = \quad 21$$

Fidusen er altså at parre talene, så det første og det sidste kommer sammen, det andet og det næstsidste kommer sammen, osv. Ved denne metode får vi samme sum for hvert par af tal, og vi får halvt så mange summer som vi har tal til at begynde med. Hvis der er et lige antal tal. Vi kan på denne måde skrive summen af de seks første tal som

$$\tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 + 1)$$

Men hvad nu hvis det er summen af de syv første tal? Som ovenfor skriver vi

$$\begin{aligned}
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\
= \;& (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 \\
= \;& \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 + 1) + 7 \\
= \;& \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 + 1) + (6 + 1) \\
= \;& (6 + 1) \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 6 + 1) \\
= \;& 7 \cdot \tfrac{1}{2}(6 + 2) \\
= \;& \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \\
= \;& \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7 + 1)
\end{aligned}$$

dvs. en formel af samme form som der gjaldt for 6.
Det lader til at det er ligegyldigt om der er et lige eller et ulige antal. I begge tilfælde tør vi tro på at summen af de første n tal s_n kan findes således:

$$s_n = \tfrac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

Vi kan bevise påstanden ved et argument mage til ovenfor[2], men vi vil hellere bruge en anden fremgangsmåde, kaldet et induktionsbevis.

---

[2]Formlens gyldighed direkte:

$s_n \quad = \quad 1+2+3+...+n \quad \Leftrightarrow$

$s_n + s_n \quad = \quad (1+2+3+...+n) + (n +...+3+2+1) \Leftrightarrow$

$2\, s_n \quad = \quad (1+n)+(2+n-1)+...$ i alt n led $\Leftrightarrow$

$2\, s_n \quad = \quad n(n+1) \quad \Leftrightarrow$

$s_n \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1)$

For $n = 1$ er det lidt kunstigt at tale om en sum, men vi vil alligevel tillade os at gøre det, og regne med at summen er 1. Bruges formlen i tilfældet $n = 1$, fås $\frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$. Formlen og direkte regning giver altså det samme, og formlen er derfor rigtig i tilfældet $n = 1$.
For $n = 2$ har vi $1 + 2 = 3$, og formlen giver $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 + 1) = 3$, så formlen er også rigtig her.

Opgave 1
Vis at formlen giver det rigtige i tilfældene $n = 4$ og $n = 5$.

Opgave 2
Vis, ved at efterligne argumentet ovenfor, at hvis formlen er rigtig for $n = 7$, så er den det også for $n = 8$.

Men hvad med $n = 9, 10, 11, ...$? Hvis vi skal regne efter i hvert tilfælde, er der ikke meget fidus i at have en formel.
Så vi ser på tilfældet $n + 1$, idet vi antager at formlen er gyldig for n.
Vi *antager* altså at der gælder

$$s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \tfrac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

og vil gerne finde et udtryk for s_{n+1}:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) \\ &= (1 + 2 + 3 + ... + n) + (n + 1) \\ &= s_n + (n + 1) \end{aligned}$$

I dette udtryk kan vi bruge vores formel for s_n da vi jo har antaget at den gælder. Derfor får vi

$$s_{n+1} = \tfrac{1}{2} \cdot n(n + 1) + (n + 1)$$

og sættes $n + 1$ udenfor parentes, har vi

$$s_{n+1} = (n + 1)(\tfrac{1}{2} \cdot n + 1) = (n + 1)\tfrac{1}{2}(n + 2) = \tfrac{1}{2}(n + 1)((n + 1) + 1)$$

Formlen har altså samme udseende for n og $n + 1$. Dvs. at den gælder for $n + 1$ når den gælder for n. Men nu ved vi at den gælder for $n = 1$. Derfor gælder den også for $n = 1 + 1 = 2$. Men så gælder den også for $n = 2 + 1 = 3$, hvorefter den gælder for $n = 3 + 1 = 4$, osv. Der udløses en "kædereaktion" eller en lavine om man vil, og vi konkluderer at formlen gælder for et hvilketsomhelst naturligt tal, og dermed for alle naturlige tal.
Et bevis af den type som vi lige har gennemført, kaldes for et induktionsbevis, og at bevise en sætning ved hjælp af et induktionsbevis, kaldes at bevise ved induktion.

Den almene situation er, at man har en påstand som afhænger af n, $p(n)$:

1. **Først viser man at påstanden er sand for $n = 1$, dvs. at $p(1)$ er sand.**
2. **Derefter viser man, at hvis påstanden er sand for n, så er den det også for $n + 1$, eller, hvad der kommer ud på det samme, at $p(n)$ er sand medfører at $p(n+1)$ er sand.**
3. **Af 1 og 2 slutter man at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.**

(Man ser ofte at $\mathbb{N}$ også omfatter 0; det er som regel ikke noget problem. I vores eksempel er det på den anden side nok lidt kunstigt at tale om summen af de nul første tal; men tillægger man denne sum værdien 0, så passer formlen).

Opgave 3

Vis, at

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \quad ,n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$

Opgave 4

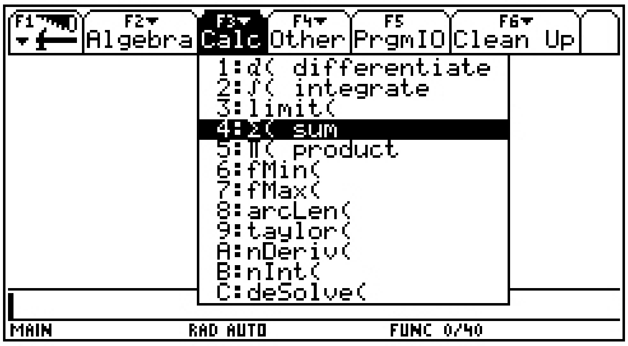
Der findes et tal k, således at formlen

$$3 + 5\cdot 2 + 7\cdot 2^2 + 9\cdot 2^3 + \ldots + (2n+1)\cdot 2^{n-1} = (2n-k)\cdot 2^n + k$$

gælder for alle hele positive tal n.
Bestem k og bevis formlen.

På TI-89 er der en funktion som kan beregne summer[3]. Den befinder sig i F3, 4 og har symbolet Σ, fig.6.

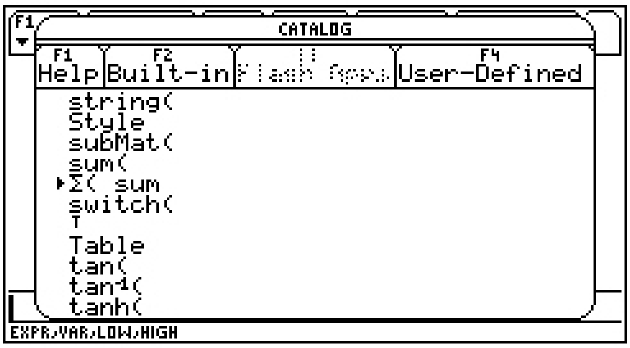
Fig.6



Syntaksen er, fig.7:

Σ(udtryk, variabel, nedre grænse, øvre grænse).

Fig.7



[3] På TI's hjemmeside kan man downloade en manual til TI-89/92+/Voyage. Adressen er http://education.ti.com/us/product/tech/89/guide/89guidedk.html

Vil man fx finde summen af de første 10 tal, skriver man

$\Sigma(i, i, 1, 10)$

trykker på ENTER, og straks har man svaret 55.

Opgave 5

Prøv at skrive *j* i stedet for *i*, altså Σ (j, j, 1, 10), og bemærk hvad der sker. Eller *k* i stedet for *j*. Er det afgørende om man bruger *i*, *j* eller *k*?

I matematikken bruges i øvrigt en notation som minder meget om TI-89'erens:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$$

Opgave 6

Find summen af de *n* første tal vha. TI-89.

Opgave 7

Brug TI-89 til at finde summen af kvadratet på de *n* første hele tal, altså $1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2$.

Bevis ved induktion, at det er rigtigt at denne sum er $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Forsøg også her at udskifte *i* med *j* eller *k*.
Og prøv så med *n*.
Hvad sker?
Hvordan "opfatter" TI-89 symbolet $\Sigma(n^2, n, 1, n)$?

Opgave 8

Man kalder

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1}$$

for en (endelig) kvotientrække.
Årsagen til dette navn er, at forholdet, kvotienten, mellem to på hinanden følgende led er konstant:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{aq^i}{aq^{i-1}} = q$$

Find summen vha. TI-89, og vis ved induktion at det er rigtigt.

Opgave 9

a og *q* har samme betydning som i opg.8. Hvis man kun ser på værdier af *q* som (numerisk) er mindre end 1, og lader *n* vokse, hvilken grænseværdi får man så for *n* gående mod ∞?

Opgave 10

Find et udtryk for

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

og bevis at det er rigtigt.

Vi har tidligere vist, at differentialkvotienten af et produkt er

$$(f_1 f_2)' = (f_1)' f_2 + f_1 (f_2)'$$

Opgave 11

Vis ved induktion, at

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = (f_1)' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 (f_2)' f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3 \cdots (f_n)'$$

I specialtilfældet $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \ldots = f_n(x) = x$, har vi

$$(x^n)' = 1 \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \ldots \cdot x + x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot 1 = nx^{n-1}$$

Opgave 12

Vis denne formel direkte vha. et induktionsbevis.

Vink. For $n = 1$ står der $(x)' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$; her er formlen altså ok.

For $n = 2$ står der $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$; så også i dette tilfælde passer formlen.

Vis nu, at formlen gælder for n+1 når det antages at den gælder for n.

Opgave 13

Vis, at vinkelsummen i en n-kant, $n \geq 3$, er $(n - 2) \cdot 180°$

Opgave 14

Vis, at summen af de første n ulige tal er n^2, altså at

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Opgave 15

Vis, at

$$2^n \geq n + 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$