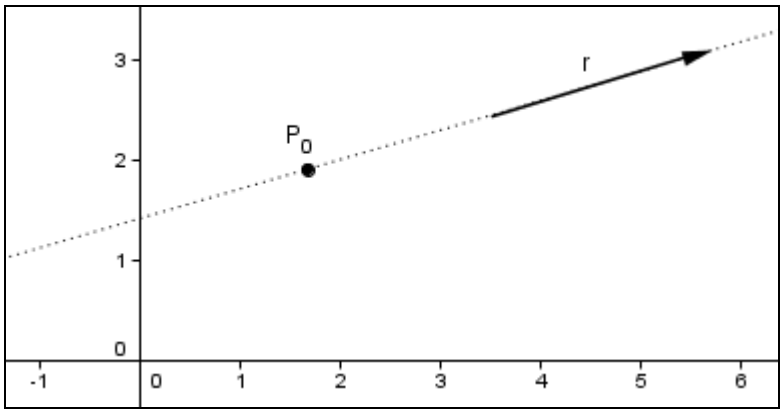
Vektorregning i 3D

Ligning for en ret linje i rummet

Normalt hører man kun om en *parameterfremstilling* for en ret linje i rummet.
Det skyldes, at det er let at skrive op.
Men en ret linje i rummet HAR en *ligning* – den er bare meget kompliceret, og ret ubrugelig i opgaver.



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$P = (x, y, z)$$

Udledning af linjens ligning:

Punktet P ligger på linjen $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{r}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right| = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|^2 = 0$

Krydsproduktet udregnes nu:

$$\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} r_2 & y - y_0 \\ r_3 & z - z_0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_3 & z - z_0 \\ r_1 & x - x_0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_1 & x - x_0 \\ r_2 & y - y_0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \cdot (z - z_0) - r_3 \cdot (y - y_0) \\ r_3 \cdot (x - x_0) - r_1 \cdot (z - z_0) \\ r_1 \cdot (y - y_0) - r_2 \cdot (x - x_0) \end{pmatrix}$$

Derfor bliver

$$\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(r_2 \cdot (z - z_0) - r_3 \cdot (y - y_0)\right)^2 + \left(r_3 \cdot (x - x_0) - r_1 \cdot (z - z_0)\right)^2 + \left(r_1 \cdot (y - y_0) - r_2 \cdot (x - x_0)\right)^2 = 0$$

Hvis man ganger dette udtryk ud, får man et 2. grads polynomium i x, y og z.
Der kommer led af typen: $x, y, z, x^2, y^2, z^2, x \cdot y, x \cdot z, y \cdot z$.

Konklusion: en linje i rummet HAR en ligning, som er et 2. grads polynomium i x, y og z.

Men ligningen er ubrugelig i praksis!