Vektorregning i 3D

Formålet er at skabe overblik over emnet.
Bogen Mat3A af Jens Carstensen, kapitel 3 og 4, side 83-150.

Definitioner, formler, sætninger og ***ideen i beviserne*** – så det er muligt at huske beviserne.

Oversigt side 110-111

- Stedvektor
- Vektors koordinater
- Midtpunkt af linjestykke
- Skalarprodukt (prikprodukt)
- Længde af vektor
- Afstanden mellem 2 punkter
- Projektion af vektor på vektor
- Vinkel mellem vektorer (med skalarprodukt) *cosinus*
- Linjes parameterfremstilling
- Plans ligning
- Plans parameterfremstilling

Oversigt side 149-150

- Krydsprodukt (vektorprodukt) *TI-89: CrossP({ , , },{ , , })*
- Vinkel mellem vektorer (med krydsprodukt) *sinus*
- Areal af parallelogram og af trekant
- Afstand
    - Punkt ←→ plan
    - Punkt ←→ linje
    - Linje ←→ linje
    - Mellem 2 parallelle planer
- Vinkel mellem 2 planer
- Vinkel mellem linje og plan
- Projektion
    - Punkt på plan
    - Punkt på linje
    - Linje på plan
- Kuglen
    - Ligning
    - Tangentplan

Anvendelse af skalarproduktet (prikproduktet)

Ortogonale vektorer:
$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ *hvis vektorerne ikke er nulvektoren.*

Anvendelse af krydsproduktet (vektorproduktet)

Parallelle vektorer:
$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ *hvis vektorerne ikke er nulvektoren.*

Ideen i beviser for sætninger/ metoder

<u>s. 107 Ændring fra en parameterfremstilling til en ligning for et plan</u>
P_0 kendes.
Normalvektor for planen findes som krydsprodukt af de 2 givne retningsvektorer: $\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}$
Så kan ligningen opskrives.

<u>s. 121-123 Skæring mellem planer</u>
Skæringen er en linje.
*Hvis begge planer er givet ved **ligninger**, så sæt én af variablene lig med t. Derefter løse de 2 ligninger mht. de 2 øvrige variable. Her kan TI-89 anvendes*
solve(ligning1 and ligning2, {2 variable}).
*Hvis et plan er givet ved **en ligning**, og det andet ved **en parameterfremstilling**, så indsæt parameterfremstillingen i ligningen, og find t som funktion af s. Sammenhængen indsættes i parameterfremstillingen, som hermed kun har én variabel. Dette er så parameterfremstillingen for skæringslinjen.*

<u>s. 123-127 Skæring mellem linje og plan</u>
Skæringen er normalt et punkt.
Antag at planen er givet ved en ligning.
Linjens parameterfremstilling indsættes i planen ligning. Den fundne værdi af t indsættes i linjens parameterfremstilling.

<u>s. 127-128 Projektion af punkt på plan</u>
NB: Man går vinkelret fra punktet på planen.
Bestemmer en parameterfremstilling for normalen (linje vinkelret på) til planen gennem punktet P_0:
Punktet P_0 er kendt
Linjens retningsvektor = planens normalvektor
Denne parameterfremstilling indsættes i planens ligning. Parameter t findes, og indsættes i normalens parameterfremstilling.

<u>s. 128-132 Afstand mellem punkt P_1 og plan</u>

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

<u>Bevis 1</u>:
Find et punkt P_0 planen:
planens ligning: indsæt værdier for x og y, løs så for z.
$\overrightarrow{P_0P_1}$ *projiceres på planens normalvektor.*
Afstanden er så lig med projektionsvektorens længde.

Bevis 2:
Gør som i "projektion af punkt på plan". Projektionspunktet kaldes Q.
Afstanden = $\left|\overrightarrow{QP_1}\right|$

s. 132-133 Afstand fra punkt til linje

$$\frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$$

$\overrightarrow{P_0P}$ *vektoren og* $\vec{r}$ *vektoren udspænder en trekant.*
Arealet opskrives op 2 forskellige måder:
½ delen af krydsproduktet af de 2 vektorer
½ højde (d) gange grundlinje
Løs ligningen mht. højden d.

s. 134 Projektion af punkt på linje
P_0 *kendes.*
$\overrightarrow{P_0P}$ *projiceres på linjens retningsvektor. Q er projektionspunktet.*
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$

s. 135-136 Afstand mellem linjer

$$\frac{\left|\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

Normalvektor findes som krydsprodukt af de 2 givne retningsvektorer: $\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}$
Vælg et punkt P_1 *hhv.* P_2 *på hver af de to linjer.*
$\overrightarrow{P_1P_2}$ *projiceres på* $\vec{n}$.
Afstand = længden af projektionen.

s. 137-139 Projektion af linje på plan
Retningsvektoren for linjen projiceres på planens normalvektor.
Projektionsvektoren trækkes fra den givne linjes retningsvektor, og facit bliver en retningsvektor for den projicerede linje.
P_0 *findes som skæringen mellem den givne linje og planen.*

s. 139-140 Vinkel mellem planer
Antag, at planerne er givet ved ligninger.
Vinklen mellem planerne = vinklen mellem de 2 planers normalvektorer.
NB: Der er 2 forskellige vinkler mellem planerne. Vinkelsummen er 180^o.

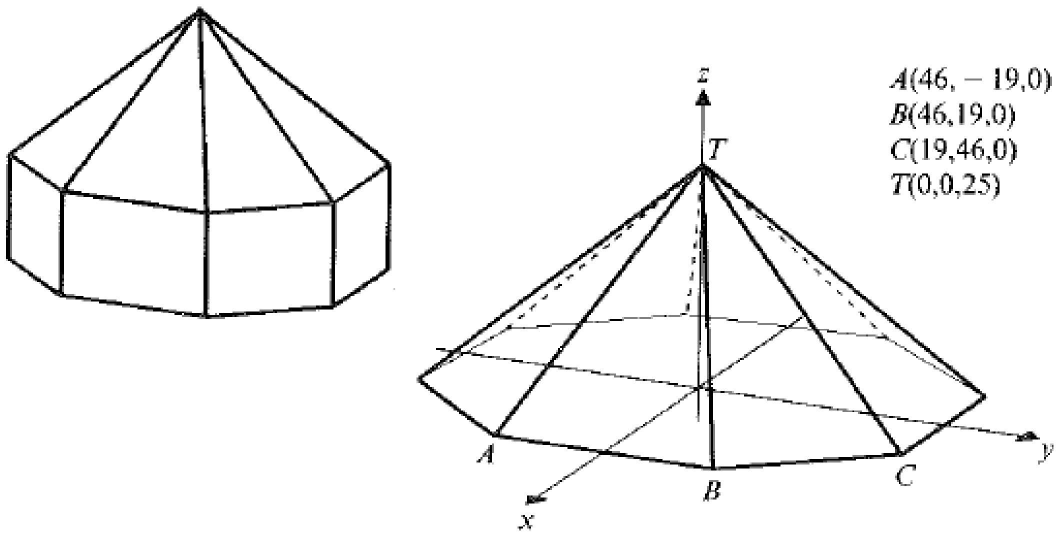
<u>s. 140-142 Vinkel mellem linje og plan</u>

Bestem først vinklen w mellem linjens retningsvektor og planens normalvektor.
Den korrekte vinkel v er så: $v = |90° - w|$

<u>Vinkel mellem sider i et polyeder, bygning, telt mm.</u>:

Vinklen mellem 2 flader, som støder sammen, findes ved at den ene flades normalvektor går ind i bygningen, den anden ud af bygningen.
Vinklen mellem fladerne = vinklen mellem de 2 normalvektorer!

Opgave 3
(ca. 15 point)



Ovenfor ses en skitse af en ottekantet bygning. Endvidere er bygningens tag indtegnet i et koordinatsystem.

Beregn arealet af tagfladen BTC.

Beregn vinklen mellem tagfladerne ATB og BTC.

a) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 19-46 \\ 46-19 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} 0-46 \\ 0-19 \\ 25-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ -19 \\ 25 \end{pmatrix}$

Areal af trekant BTC = $\frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 675 \\ 675 \\ 1755 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{675^2 + 675^2 + 1755^2} = \underline{\underline{998{,}9}}$

b) Udadgående normalvektor for trekanten BTC = $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT}$ (jf. højrehåndsreglen).

Indadgående normalvektor for trekanten ATB = $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BT}$ (jf. højrehåndsreglen).

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 675 \\ 675 \\ 1755 \end{pmatrix}$$ udregnet i (a).

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 46-46 \\ -19-19 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -38 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -38 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -46 \\ -19 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -950 \\ 0 \\ -1748 \end{pmatrix}$$

Vinkel: $$\cos(v) = \frac{\begin{pmatrix} 675 \\ 675 \\ 1755 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -950 \\ 0 \\ -1748 \end{pmatrix}}{\sqrt{675^2+675^2+1755^2} \cdot \sqrt{950^2+0^2+1748^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v = 158{,}9^\circ}}$$