Vektorregning og geometri i rummet

Kapitel 5 side 132-181

Def: vektor har både retning og længde.
En vektor kan parallelforskydes, dvs. afsættes fra et vilkårligt punkt.

Notation: pil henover symbolet, f.eks. $\vec{a}$

Koordinater: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Regneoperationer: sum $\vec{a} + \vec{b}$, faktor $k\vec{a}$, modsatte vektor $-\vec{a}$, differens $\vec{b} - \vec{a}$
Regner koordinatvis.
Geometrisk: sum svarer til kræfternes parallelogram.

Regneregler: kommutative lov, associative lov, distributive love gælder(side 141).

Stedvektor: $\overrightarrow{OP}$ har samme koordinater som punktet *P*.

Vektor mellem 2 punkter: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$

Indskudsreglen: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (man kan indskyde et vilkårligt punkt *B*,jvf. sum af 2 vektorer).

Afstand mellem 2 punkter: $dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
(kommer direkte fra Pythagoras' sætning, som anvendes 2 gange på 2 forskellige trekanter).

Skalarproduktet (prikproduktet): $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Regneregler for skalarprodukt: side 150 sætning 40

Vinkel mellem 2 vektorer: $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Ortogonale vektorer: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$: $\underset{\vec{b}}{\vec{a}} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \right) \vec{b}$

Krydsprodukt (vektorprodukt): $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_x \\ \mathrm{D}_y \\ \mathrm{D}_z \end{bmatrix}$

hvor $\mathrm{D}_x = det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ og $\mathrm{D}_y = det \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ og $\mathrm{D}_z = det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

NB: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ og $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v)$

Parallelle vektorer: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Areal af parallelogram: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Ret linje (parameterfremstilling): $\vec{r}$ **retningsvektor**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Plan (ligning): $\vec{n}$ **normalvektor**

$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

Vinkel mellem 2 linjer = vinkel mellem linjernes retningsvektorer.

Vinkel mellem 2 planer = vinkel mellem planernes normalvektorer.

Vinkel mellem linje og plan = 90^o**- vinkel mellem linjens retningsvektor og planens normalvektor.**

Skæring mellem 2 linjer:
Sæt de 2 parameterfremstillinger lig hinanden, og regn løs.

Skæring mellem linje og plan:
Indsæt linjens parameterfremstilling i planens ligning, og regn løs.

Afstand fra punkt til plan: $dist(Q, \alpha) = \frac{\left|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

hvor punktet

$Q = (x_0, y_0, z_0)$ og planen α med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

Kuglens ligning: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
hvor centrum $C = (x_0, y_0, z_0)$ og radius = r.

NB: tangenten står vinkelret på linjen/vektoren gennem centrum og røringspunktet.