Skæring mellem linjer og planer i $\mathbb{R}^3$

Eksempel 143 side 169 - skæring mellem 2 linjer (ét punkt)

Givet parameterfremstilling for 2 linjer:

$$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ og } m: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NB: Vigtigt, at parametreren ikke hedder det samme i de 2 parameterfremstillinger!
Kald den ene for t, den anden for s.

```
> restart
> l := <3,-2, 1> + t·<5, 1,-4>
```

$$l := \begin{bmatrix} 3+5t \\ -2+t \\ 1-4t \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

```
> m := <3, 5,-2> + s·<-2, 1, 1>
```

$$m := \begin{bmatrix} 3-2s \\ 5+s \\ -2+s \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

```
> solve({l[1]=m[1], l[2]=m[2], l[3]=m[3]}, {t, s})
```

$$\{s=-5, t=2\} \quad (1.3)$$

Altså netop ét skæringspunkt!

```
> subs(t=2, l)
```

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

```
> subs(s=-5, m)
```

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Konklusion: De 2 rette linjer skæring hinanden i netop ét punkt, som hedder $(13, 0, -7)$

Eksempel 144 side 170 - skæring mellem 2 linjer (ingen)

Givet parameterfremstilling for 2 linjer:

$$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ og } m: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NB: Vigtigt, at parametreren ikke hedder det samme i de 2 parameterfremstillinger!
Kald den ene for t, den anden for s.

```
> restart
> l := ⟨10, -11, 12⟩ + t·⟨1, -1, 5⟩
```

$$l := \begin{bmatrix} 10 + t \\ -11 - t \\ 12 + 5\,t \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1)}$$

```
> m := ⟨-1, -3, 1⟩ + s·⟨4, -1, 1⟩
```

$$m := \begin{bmatrix} -1 + 4\,s \\ -3 - s \\ 1 + s \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2)}$$

Skæring i 3 dimensioner?

```
> solve({l1 = m1, l2 = m2, l3 = m3}, {t, s})
```

Altså intet skæringspunkt!

Checker skæring i 2 dimensioner:

```
> solve({l1 = m1, l2 = m2}, {t, s})
```

$$\{s = 1, t = -7\} \quad \textbf{(2.3)}$$

```
> subs(t = -7, l)
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -23 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.4)}$$

```
> subs(s = 1, m)
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

Konklusion: De 2 rette linjer skæring ikke hinanden i netop ét punkt.
NB: Passer kun i x og y, ikke i z.

Eksempel 145 side 171 - skæring mellem linje og plan (ét punkt)

Givet plan $\alpha: 4 \cdot x - 6 \cdot y + 10 \cdot z - 26 = 0$.

Givet linje m: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

```
> restart
```

```
> α := 4·x − 6·y + 10·z − 26 = 0
```

$$\alpha := 4x - 6y + 10z - 26 = 0 \quad \textbf{(3.1)}$$

```
> m := ⟨1, -1, -6⟩ + t·⟨2, -2, 4⟩
```

$$m := \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ -1 - 2t \\ -6 + 4t \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

```
> subs(x = m[1], y = m[2], z = m[3], α)
```

$$-76 + 60t = 0 \quad \textbf{(3.3)}$$

```
> t := solve((3.3), t)
```

$$t := \frac{19}{15} \quad \textbf{(3.4)}$$

```
> m
```

$$\begin{bmatrix} \frac{53}{15} \\ -\frac{53}{15} \\ -\frac{14}{15} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.5)}$$

```
> evalf(m)
```

$$\begin{bmatrix} 3.533333333 \\ -3.533333333 \\ -0.933333333 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.6)}$$

Konklusion: Der er netop ét skæringspunkt. Det har koordinaterne $\left(\frac{53}{15}, -\frac{53}{15}, -\frac{14}{15}\right) \approx (3.53, -3.53, -0.93)$