Projektioner i $\mathbb{R}^3$

Eksempel 146 side 172 - projektion af punkt på plan

Givet ligning for plan $\alpha: -5\cdot x + 4\cdot y + 2\cdot z - 44 = 0$
Givet punkt $A = (10, 5, -8)$
Beregn projektionen af punkt A på plan α

> *restart*

> $A := \langle 10, 5, -8 \rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1)}$$

> $\alpha := -5\cdot x + 4\cdot y + 2\cdot z - 44 = 0$

$$\alpha := -5\,x + 4\,y + 2\,z - 44 = 0 \quad \textbf{(1.2)}$$

Normalvektor for plan α:

> $\vec{n} := \langle -5, 4, 2 \rangle$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3)}$$

Parameterfremstilling for linje l gennem A vinkelret på plan α:

> $l := A + t\cdot\vec{n}$

$$l := \begin{bmatrix} 10 - 5\,t \\ 5 + 4\,t \\ -8 + 2\,t \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4)}$$

Finder skæringspunkt mellem linje l og plan α:

> $subs\left(x = l_1, y = l_2, z = l_3, \alpha\right)$

$$-90 + 45\,t = 0 \quad \textbf{(1.5)}$$

> $t := solve(\%, t)$

$$t := 2 \quad \textbf{(1.6)}$$

> l

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.7)}$$

Konklusion: Projektionen af punktet A på plan α er givet ved $\underline{\underline{(0, 13, -4)}}$

Eksempel - projektion af vektor på plan

Givet ligning for plan α : $-5\cdot x+4\cdot y+2\cdot z-44=0$

Givet vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-4\\2\end{bmatrix}$

Beregn projektionen af vektor $\vec{v}$ på plan α

> *restart*

> *with*(*GymVektor*) :

> $\vec{v} := \langle 1,-4,2\rangle$

$$\vec{v} := \begin{bmatrix}1\\-4\\2\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1)}$$

> $\alpha := -5\cdot x+4\cdot y+2\cdot z-44=0$

$$\alpha := -5\,x+4\,y+2\,z-44=0 \quad \textbf{(2.2)}$$

Normalvektor for plan α :

> $\vec{n} := \langle -5,4,2\rangle$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix}-5\\4\\2\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3)}$$

Projektionen af $\vec{v}$ på normalvektoren $\vec{n}$:

> $\overrightarrow{pn} := Projektion(\vec{v},\vec{n})$

$$\overrightarrow{pn} := \begin{bmatrix}\frac{17}{9}\\-\frac{68}{45}\\-\frac{34}{45}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.4)}$$

Projektionen af $\vec{v}$ på plan α beregnes:

> $\overrightarrow{p\alpha} := \vec{v}-\overrightarrow{pn}$

$$\overrightarrow{p\alpha} := \begin{bmatrix}-\frac{8}{9}\\-\frac{112}{45}\\\frac{124}{45}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

> *evalf*(%)

$$\begin{bmatrix} -0.8888888889 \\ -2.488888889 \\ 2.755555556 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Test: Er $\overrightarrow{p\alpha} \perp \vec{n}$?

> $Prik(\overrightarrow{p\alpha}, \vec{n})$

$$0 \tag{2.7}$$

Konklusion: Projektionen af vektor $\vec{v}$ på plan α er givet ved $\begin{bmatrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{112}{45} \\ \frac{124}{45} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.89 \\ -2.49 \\ 2.76 \end{bmatrix}$

Eksempel 147 side 174 - projektion af linje på plan

Givet ligning for plan $\alpha : x + y + z - 1 = 0$

Givet parameterfremstilling for linje l : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Beregn projektionen af linje *l* på plan α

> *restart*

> $\alpha := x + y + z - 1 = 0$

$$\alpha := x + y + z - 1 = 0 \tag{3.1}$$

> $l := \langle 9, 9, 9 \rangle + t \cdot \langle 4, 4, 5 \rangle$

$$l := \begin{bmatrix} 9 + 4\,t \\ 9 + 4\,t \\ 9 + 5\,t \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Find 2 punkter på linjen l.
Sæt f.eks. $t = 0$ og $t = 1$:

> $P1 := subs(t = 0, l)$

$$P1 := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

> $P2 := subs(t = 1, l)$

(3.4)

$$P2 := \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4)}$$

Normalvektor for plan α:

> $\vec{n} := \langle 1, 1, 1 \rangle$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.5)}$$

Parameterfremstilling for linje $l1$ gennem $P1$ vinkelret på plan α:

> $l1 := P1 + t \cdot \vec{n}$

$$l1 := \begin{bmatrix} 9 + t \\ 9 + t \\ 9 + t \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.6)}$$

Parameterfremstilling for linje $l2$ gennem $P2$ vinkelret på plan α:

> $l2 := P2 + t \cdot \vec{n}$

$$l2 := \begin{bmatrix} 13 + t \\ 13 + t \\ 14 + t \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.7)}$$

Finder skæringspunkt $S1$ mellem linje $l1$ og plan α:

> $solve\left(subs\left(x = l1_1, y = l1_2, z = l1_3, \alpha\right), t\right)$

$$-\frac{26}{3} \quad \textbf{(3.8)}$$

> $S1 := subs(t = \%, l1)$

$$S1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.9)}$$

Finder skæringspunkt $S2$ mellem linje $l2$ og plan α:

> $solve\left(subs\left(x = l2_1, y = l2_2, z = l2_3, \alpha\right), t\right)$

$$-13 \quad \textbf{(3.10)}$$

> $S2 := subs(t = \%, l2)$

(3.11)

$$S2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Retningsvektor for den projicerede linje:

> $\vec{r} := S2 - S1$

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Parameterfremstilling for den projicerede linje p:

> $p := S1 + t \cdot \vec{r}$

$$p := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,t \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,t \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,t \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Test: Ligger p i plan α ?

> $subs(x = p_1, y = p_2, z = p_3, \alpha)$

$$0 = 0 \tag{3.14}$$

Konklusion: Projektionen af linje l på plan α har parameterfremstillingen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Eksempel - projektion af punkt på linje

Givet parameterfremstilling for linje l : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Givet punkt $A = (10, 5, -8)$

Beregn projektionen af punkt A på linje l

> *restart*

> *with*(*GymVektor*) :

> $l := \langle 9, 9, 9\rangle + t\cdot\langle 4, 4, 5\rangle$

$$l := \begin{bmatrix} 9+4\,t \\ 9+4\,t \\ 9+5\,t \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

> $A := \langle 10, 5, -8\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Retningsvektor for linje l:

> $\vec{r} := \langle 4, 4, 5\rangle$

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Retningsvektoren for linje l er normalvektor for et plan α gennem punkt A :

> $\vec{n} := \vec{r}$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Ligning for plan α:

> $\alpha := Prik(\vec{n}, \langle x, y, z\rangle - A) = 0$

$$\alpha := 4\,x - 20 + 4\,y + 5\,z = 0 \tag{4.5}$$

Finde skæringspunkt mellem linje l og plan α :

> $solve\left(subs\left(x = l_1, y = l_2, z = l_3, \alpha\right), t\right)$

$$-\frac{97}{57} \tag{4.6}$$

> $P := subs(t = \%, l)$

$$P := \begin{bmatrix} \frac{125}{57} \\ \frac{125}{57} \\ \frac{28}{57} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

> *evalf*(*P*)

(4.8)

$$\begin{bmatrix} 2.192982456 \\ 2.192982456 \\ 0.4912280702 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Test: Er $\overrightarrow{AP} \perp l$ **?**

> $Prik(P - A, \vec{r})$

$$0 \tag{4.9}$$

Konklusion: Projektionen P af punkt A på linje l er givet ved

$$\left(\frac{125}{57}, \frac{125}{57}, \frac{28}{57}\right) \approx (2.19, 2.19, 0.49)$$