3 forskellige beviser for samme sætning:

induktionsbevis, direkte bevis, CAS-bevis

Sum af ulige tal (fra nr. 1 op til nr. n)

Formel:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1) = \underline{\underline{n^2}}$

eller

$\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1) = \underline{\underline{n^2}}$

Bevis

Induktionsbevis:

1) Vise formlen OK for $n = 1$: $1 = 1^2$, klart!

2) Antag formlen gælder op til n, vis den så også gælder for $n + 1$:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot (n+1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1) + (2 \cdot n + 1) =$
$[1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1)] + (2 \cdot n + 1) = n^2 + (2 \cdot n + 1) = n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$, som forventet!

NB: Det lilla markerede er, hvor man anvender induktionsantagelsen.

Direkte bevis med opdeling i tilfælde:

NB: n er antallet af led i summen $1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1)$

a) Antag, at ***n* er lige** :
Man parrer ledene, så 1. led lægges sammen med sidste led, 2. led lægges sammen med næstsidste led osv.

Når n er et lige, vil alle led på den måde være parret.

Så vil alle disse par have summen $(2\cdot n-1)+1=2\cdot n$, og der vil være $\frac{n}{2}$ summer.

Den samlede sum $=(2\cdot n)\cdot\frac{n}{2}=\underline{\underline{n^2}}$

Taleksempel: $n=8$

$1+3+5+7+9+11+13+15=(1+3+5+7)+(9+11+13+15)=$
$(1+15)+(3+13)+(5+11)+(7+9)=16+16+16+16=16\cdot4=64$

$8^2=64$, som forventet!

b) Antag, at ***n* er ulige** :

Man parrer ledene, så 1. led lægges sammen med sidste led, 2. led lægges sammen med næstsidste led osv.

Når n er et ulige, vil alle led på den måde være parret - pånær det midterste led!

Alle par har summen $(2\cdot n-1)+1=2\cdot n$, og der vil være $\frac{n-1}{2}$ summer. Hertil kommer det midterste led, som er n.

Den samlede sum $=(2\cdot n)\cdot\frac{n-1}{2}+n=n\cdot(n-1)+n=n^2-n+n=\underline{\underline{n^2}}$

Taleksempel: $n=9$

$1+3+5+7+9+11+13+15+17=(1+3+5+7)+9+(11+13+15+17)=$
$[(1+17)+(3+15)+(5+13)+(7+11)]+9=[18+18+18+18]+9=18\cdot4$
$+9=72+9=81$

$9^2=81$, som forventet!

CAS bevis (Maple)

> *restart*

> $\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)$

$$(n+1)^2-2n-1 \qquad \textbf{(1.1.3.1)}$$

> *simplify*(%)

$$n^2 \qquad \textbf{(1.1.3.2)}$$

Sum af alle tal op til nr. n

Formel:

$$1+2+3+...+n=\underline{\underline{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}}$$

eller

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Matematisk bevis

Induktionsbevis:

1) Vise formlen OK for $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$, klart!

2) Antag formlen gælder op til n, vis den så også gælder for $n+1$:
$1+3+5+\ldots+(n+1) = 1+3+5+\ldots+n+(n+1) =$
$[1+3+5+\ldots+n]+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) =$
$\frac{n^2+n}{2}+n+1 = \frac{(n^2+n)+(2\cdot n+2)}{2} = \frac{n^2+3\cdot n+2}{2} =$
$\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$, som forventet!

NB: Det lilla markerede er, hvor man anvender induktionsantagelsen.

Direkte bevis med opdeling i tilfælde:

a) Antag, at ***n* er lige** (så vil $\frac{n}{2}$ være et helt tal):

$1+2+3+\ldots+n = 1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)+\ldots+n =$
$\left[1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}\right]+\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)+\ldots+n\right]$
Man parrer nu ledene, så 1. led i første parentes lægges sammen med sidste led i 2. parentes, 2. led i første parentes lægges sammen med næstsidste led i 2. parentes osv.
Så vil alle disse par have summen $n+1$, og der vil være $\frac{n}{2}$ summer.

Den samlede sum $= (n+1)\cdot\frac{n}{2} = \underline{\underline{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}}$

Taleksempel: *n* = 10
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+2+3+4+5)+(6+7+8+9+10) =$
$(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 11+11+11+11+11 = 11\cdot5$
$= 55$

$\frac{10\cdot(10+1)}{2} = \frac{10\cdot11}{2} = 5\cdot11 = 55$, som forventet!

b) Antag, at ***n* er ulige** (så vil $\frac{n-1}{2}$ og $\frac{n+1}{2}$ være hele tal):

$$1+2+3+\ldots+n=1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}+\frac{n+2}{2}\ldots+n=$$
$$\left[1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right]+\frac{n+1}{2}+\left[\frac{n+2}{2}+\ldots+n\right]$$

Man parrer nu ledene, så 1. led i første parentes lægges sammen med sidste led i 2. parentes, 2. led i første parentes lægges sammen med næstsidste led i 2. parentes osv.
Så vil alle disse par have summen $n+1$, og der vil være $\frac{n-1}{2}$ summer. Dertil kommer midterste led på $\frac{n+1}{2}$.

Den samlede sum

$$=(n+1)\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n-1)+(n+1)}{2}=\frac{n^2-1+n+1}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$
$$=\underline{\underline{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}}$$

Taleksempel: $n=9$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+2+3+4)+5+(6+7+8+9)=$
$[(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)]+5=[10+10+10+10]+5=10\cdot4+5=45$

$\frac{9\cdot(9+1)}{2}=\frac{9\cdot10}{2}=9\cdot5=45$, som forventet!

CAS bevis (Maple)

> *restart*

> $\sum_{i=1}^{n} i$

$$\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.1.3.1)}$$

> *simplify*(%)

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \qquad \textbf{(2.1.3.2)}$$

> *factor*(%)

$$\frac{1}{2}n(n+1) \qquad \textbf{(2.1.3.3)}$$