Bevistyper i matematik

TYPE 1: Direkte bevis

Sætningen $A \Rightarrow B$ bevises direkte.

Antag at A gælder. Vis så at B gælder.

TYPE 2: Indirekte bevis

Sætningen $A \Rightarrow B$ bevises indirekte ved at vise, at $\neg B \land A$ er en modstrid.

Dvs. antag at B ikke gælder og at A gælder. Vis at det leder til en *modstrid.*

Forklaring med sandhedstavler:

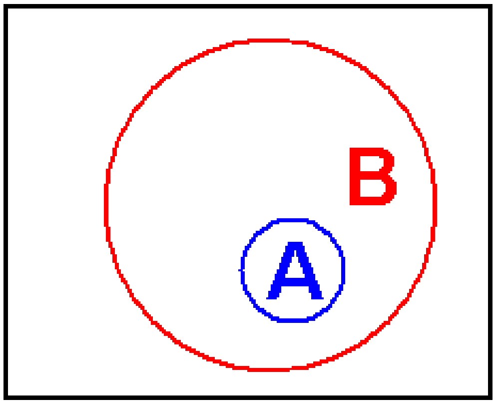
Sandhedstavlerne for $A \Rightarrow B$ og $\neg B \land A$ skal så blive *modsat*, dvs. F og S ombyttet!
Sandhedstavler: jvf. AT om "argumentation".

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg B \land A$
S	S	S	F	F
S	F	F	S	S
F	S	S	F	F
F	F	S	S	F

TYPE 3: Omskrive sætningen

Sætningen $A \Rightarrow B$ omskrives til sætningen $\neg B \Rightarrow \neg A$

Forklaring med Venn diagram:



$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ betyder, at mængden A ligger inden i mængden B. For så gælder, at "ligger man i A, så ligger man også i B".
Det er det samme som at sige, at "hvis man ligger udenfor B, så ligger man udenfor A". Dvs. $\neg \boldsymbol{B} \Rightarrow \neg \boldsymbol{A}$.

Forklaring med sandhedstavler:

Skal vise, at sætningerne har *samme sandhedstavle*, jvf. AT om "argumentation".

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg \boldsymbol{B}$	$\neg \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$	$\neg \boldsymbol{B} \Rightarrow \neg \boldsymbol{A}$
S	S	F	F	S	S
S	F	S	F	F	F
F	S	F	S	S	S
F	F	S	S	S	S

TYPE 4: Induktionsbevis

Man skal bevise en påstand $q(n)$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

<u>Metoden</u>:
1) Vis at påstanden passer for $n = 1$ (eller for første relevante tal). Dvs. $q(1)$.
2) Antag at påstanden gælder op til tallet n. Dvs. $q(1)$ ... $q(n)$ er sande. Vis så, at påstanden passer for tallet $n + 1$, dvs. $q(n + 1)$.

Hermed er påstanden vist for alle $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

http://da.wikipedia.org/wiki/Induktion_(matematik)

TYPE 5: Opdeling i tilfælde

Et bevis kan af og til gøres overskueligt ved at opdele beviset i flere uafhængige beviser.

F.eks. bevise for $x > 0$, for $x = 0$, for $x < 0$.
F.eks. undersøge alle 10 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en ad gangen.

TYPE 6: CAS-bevis

Nogen gange er et bevis så uoverskueligt, at man må ty til computerhjælp.

Et godt eksempel på det er *firfarveproblemet*, som blev bevist 1976. Anvendte 1200 timers computerberegninger!
http://da.wikipedia.org/wiki/Firfarveproblemet
http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

I gymnasiesammenhæng tyr man til et CAS-bevis, når elevernes færdigheder indenfor symbolmanipulation er for ringe!

TYPE 7: Modeksempel

Kan man finde på ét eksempel, som modbeviser en sætning - ja så er sætningen *falsk*!

Husk at nok så mange eksempler kun kan sandsynliggøre, at en sætning gælder. Ikke bevise den.

Eksempler:

1) Koefficienterne i faktorisering af polynomiet $x^n - 1$ har altid værdien -1, 0 eller 1.
(svigter for $n = 105$)

2) Fermats påstod, at $2^{2^n} + 1$ er et primtal for alle hele tal n .
(svigter for $n = 5$)