POKER

Beregning af sandsynligheder for de kendte pokerhænder.

Der deles 5 kort ud.
Samtlige pokerhænder er: $K(52, 5) = 2598960$

Kilde: http://www.math.uah.edu/stat/games/Poker.html

0. *No Value*. The hand is of none of the other types.
1. *One Pair*. The hand has 2 cards of one kind, and one card each of three other kinds.
2. *Two Pair*. The hand has 2 cards of one kind, 2 cards of another kind, and one card of a third kind.
3. *Three of a Kind*. The hand has 3 cards of one kind and one card of each of two other kinds.
4. *Straight*. The kinds of cards in the hand form a consecutive sequence but the cards are not all in the same suit. An ace can be considered the smallest denomination or the largest denomination.
5. *Flush*. The cards are all in the same suit, but the kinds of the cards do not form a consecutive sequence.
6. *Full House*. The hand has 3 cards of one kind and 2 cards of another kind.
7. *Four of a Kind*. The hand has 4 cards of one kind, and 1 card of another kind.
8. *Straight Flush*. The cards are all in the same suit and the kinds form a consecutive sequence.

Kilde: http://da.wikipedia.org/wiki/Poker

1. Royal Straight Flush (også kaldet Royal Flush): fem kort fra 10 til es i samme kulør (f.eks. 10, Kn, D, K, Es i spar) (ved to af disse afgøres vinderen her i visse spil på kuløren, ellers er der split-pot (altså delt pot), se nedenfor)
2. Straight flush: fem kort i rækkefølge af samme kulør (f.eks. 4,5,6,7,8 i hjerter) (ved to straight flush afgøres vinderen på det højeste kort i rækkefølgen)
3. Fire ens (four of a kind): fire ens kort (f.eks. fire knægte) (ved to fire ens afgøres vinderen først ved det højeste fire ens, hvis disse er de samme (kan kun forekomme ved community-cards) afgøres den på den såkaldte "low kicker", altså det femte kort)
4. Fuldt hus (full house): et sæt med tre ens plus et par (f.eks. tre 7'ere og to 4'ere) (ved to fuldt hus afgøres vinderen af de højeste tre ens, derefter af hvem der har det højeste par)
5. Flush: fem kort af samme kulør men som ikke er i rækkefølge (f.eks. ruder 2,4,7,8,D) (ved to flush afgøres vinderen af højeste kort i kuløren)
6. Straight: fem kort i rækkefølge, som ikke er i samme kulør (f.eks. 8,9,10,Kn,D i forskellige kulører) (ved to straights afgøres vinderen på den der har det højeste kort i rækkefølge)
7. Tre ens (three of a kind): tre ens kort (f.eks. tre 9'ere) (ved to tre ens afgøres vinderen først på hvem der har de højeste tre end og derpå hvem der har det højeste kort udover disse (evt. også det næsthøjeste))
8. To par (two pairs): to gange to ens (f.eks. to esser og to 5'ere) (ved to gange to par afgøres vinderen på, hvem der har det højeste par, derpå på hvem der har det højeste af de næsthøjeste par, og til sidst på hvem der har det højeste femte kort)
9. Et par (one pair): to ens kort (f.eks. to K) (ved to par afgøres vinderen på, hvem der har det højeste par, derpå hvem der har det højeste kort udover dette og så det højeste fjerde kort og til sidst det højeste femte kort)
10. Højeste kort (high card): højeste kort (f.eks. es) (ved to højeste kort afgøres vinderen også her ved at arbejde sig nedad i de øvrige kort)

> *restart*

Definerer proceduren $K(n, r)$, så vi slipper for at skrive $\text{binomial}(n, r)$:

> $K := \textbf{proc}(n, r)\ \text{binomial}(n, r)\ \textbf{end proc}$

$$K := \textbf{proc}(n, r)\ \text{binomial}(n, r)\ \textbf{end proc} \quad (1)$$

> $\text{binomial}(52, 5)$

$$2598960 \quad (2)$$

> $K(52, 5)$

$$2598960 \quad (3)$$

Et par

1. *One Pair*. The hand has 2 cards of one kind, and one card each of three other kinds.

3. $P(V=1) = 1\,098\,240/2\,598\,960 \approx 0.422569$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with one pair. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select a kind of card: **13**

b. Select 2 cards of the kind in part (a): $\binom{4}{2}$

c. Select 3 kinds of cards, different than the kind in (a): $\binom{12}{3}$

d. Select a card of each of the kinds in part (c): 4^3

a) udvælge den størrelse, der skal være et par af: K(13,1) = 13
b) udvælge de 2 kulører af kortet: K(4,2)
c) udvælge de 3 størrelser, som der ikke skal være par af: K(12,3)
d) udvælge kuløren af hver af kortene fra c): K(4,1) = 4 for hver af de 3 kort

$$P(et\,par) = \frac{K(13,1)\cdot K(4,2)\cdot K(12,3)\cdot (K(4,1))^3}{K(52,5)}$$

> $K(13,1)\cdot K(4,2)\cdot K(12,3)\cdot (K(4,1))^3$

$$1098240 \qquad \textbf{(1.1)}$$

> $P1 := \frac{K(13,1)\cdot K(4,2)\cdot K(12,3)\cdot (K(4,1))^3}{K(52,5)}; evalf(\%)$

$$P1 := \frac{352}{833}$$

$$0.4225690276 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Konklusion: sandsynligheden for **et par** som pokerhånd er $\frac{352}{833} \approx 0.423 = 42.3\ \%$

To par

2. *Two Pair*. The hand has 2 cards of one kind, 2 cards of another kind, and one card of a third kind.

4. $\mathrm{P}(V=2) = 123\,552/2\,598\,960 \approx 0.047539$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with two pair. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select two kinds of cards: $\binom{13}{2}$
b. Select two cards of each of the kinds in (a): $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$
c. Select a kind of card different from the kinds in (a): 11
d. Select a card of the kind in (c): 4

a) udvælge de størrelser, der skal være to par af: K(13,2)
b) udvælge de 2 kulører af kortet: K(4,2) for hver
c) udvælge den størrelse, som der ikke skal være par af: K(11,1) =11
d) udvælge kuløren af kortet fra c): K(4,1) =4

$$P(to\ par) = \frac{K(13,2)\cdot(K(4,2))^2\cdot K(11,1)\cdot K(4,1)}{K(52,5)}$$

> $K(13,2)\cdot(K(4,2))^2\cdot K(11,1)\cdot K(4,1)$

$$123552 \tag{2.1}$$

> $P2 := \frac{K(13,2)\cdot(K(4,2))^2\cdot K(11,1)\cdot K(4,1)}{K(52,5)}; evalf(\%)$

$$P2 := \frac{198}{4165}$$

$$0.04753901561 \tag{2.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **to par** som pokerhånd er $\frac{198}{4165} \approx 0.0475 = 4.75\ \%$

Tre ens

3. *Three of a Kind*. The hand has 3 cards of one kind and one card of each of two other kinds.

5. $\mathrm{P}(V=3) = 54\,912/2\,598\,860 \approx 0.021129$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with three of a kind. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select a kind of card: **13**

b. Select 3 cards of the kind in (a): $\binom{4}{3}$

c. Select 2 kinds of cards, different than the kind in (a): $\binom{12}{2}$

d. Select one card of each of the kinds in (c): 4^3

NB: fejl i d), skal være 4^2, ikke 4^3

a) udvælge den størrelse, der skal være tre ens af: K(13,1) = 13
b) udvælge de 3 kulører af kortet: K(4,3)
c) udvælge de størrelser, som der ikke skal ens af: K(12,2)
d) udvælge kuløren af kortet fra c): K(4,1) = 4 for hver af de 2 kort

$$P(tre\ ens) = \frac{K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,2)\cdot (K(4,1))^2}{K(52,5)}$$

> $K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,2)\cdot (K(4,1))^2$

$$54912 \qquad \textbf{(3.1)}$$

> $P3 := \frac{K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,2)\cdot (K(4,1))^2}{K(52,5)}; evalf(\%)$

$$P3 := \frac{88}{4165}$$

$$0.02112845138 \qquad \textbf{(3.2)}$$

Konklusion: sandsynligheden for **tre ens** som pokerhånd er $\frac{88}{4165} \approx 0.0211 = 2.11\ \%$

Straight flush

8. *Straight Flush*. The cards are all in the same suit and the kinds form a consecutive sequence.

6. $P(V = 8) = 40/2\,598\,960 \approx 0.000015$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with a straight flush. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select the kind of the lowest card in the sequence: 10
b. Select a suit: 4

a) udvælge den mindste størrelse (1, 2, ... , 10): 10
b) udvælge kuløren af kortet: K(4,1) = 4

$$P(straight\,flush) = \frac{10 \cdot K(4,1)}{K(52,5)}$$

> $10 \cdot K(4,1)$

$$40 \tag{4.1}$$

> $P4 := \frac{10 \cdot K(4,1)}{K(52,5)}; evalf(\%)$

$$P4 := \frac{1}{64974}$$

$$0.00001539077169 \tag{4.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **straight flush** som pokerhånd er $\frac{1}{64974} \approx 0.0000154 = 0.00154\ \%$

Straight

4. *Straight*. The kinds of cards in the hand form a consecutive sequence but the cards are not all in the same suit. An ace can be considered the smallest denomination or the largest denomination.

7. $P(V=4) = 10\,200/2\,598\,960 \approx 0.003925$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with a straight or a straight flush. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select the kind of the lowest card in the sequence: 10
b. Select a card of each kind in the sequence: 4^5

Finally, we need to subtract the number of straight flushes in Exercise 6 to get the number of hands with a straight.

a) udvælge den mindste størrelse (1, 2, ... , 10): 10
b) udvælge kuløren af kortet: K(4,1) = 4 for hvert af de 5 kort
Herfra skal trækkes antal straight flush!

$$P(straight) = \frac{10\cdot(K(4,1))^5 - 10\cdot K(4,1)}{K(52,5)}$$

> $10\cdot(K(4,1))^5 - 10\cdot K(4,1)$

$$10200 \tag{5.1}$$

> $P5 := \frac{10\cdot(K(4,1))^5 - 10\cdot K(4,1)}{K(52,5)}; evalf(\%)$

$$P5 := \frac{5}{1274}$$

$$0.003924646782 \tag{5.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **straight** som pokerhånd er $\frac{5}{1274} \approx 0.00392 = 0.392\ \%$

Flush

5. *Flush*. The cards are all in the same suit, but the kinds of the cards do not form a consecutive sequence.

8. $P(V=5) = 5108/2\,598\,960 \approx 0.001965$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with a flush or a straight flush. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select a suit: 4

b. Select 5 cards of the suit in (a): $\binom{13}{5}$

Finally, we need to subtract the number of straight flushes in Exercise 6 to get the number of hands with a flush.

a) udvælge en kulør: K(4,1) = 4
b) udvælg 5 kort fra denne kulør: K(13,5)
Herfra skal trækkes antal straight flush!

$$P(flush) = \frac{K(4,1)\cdot K(13,5) - 10\cdot K(4,1)}{K(52,5)}$$

> $K(4,1)\cdot K(13,5) - 10\cdot K(4,1)$

$$5108 \tag{6.1}$$

> $P6 := \frac{K(4,1)\cdot K(13,5) - 10\cdot K(4,1)}{K(52,5)}$; $evalf(\%)$

$$P6 := \frac{1277}{649740}$$

$$0.001965401545 \tag{6.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **flush** som pokerhånd er $\frac{1277}{649740} \approx 0.00197 = 0.197\ \%$

Full house

6. *Full House*. The hand has 3 cards of one kind and 2 cards of another kind.

9. $\mathrm{P}(V=6) = 3744/2\,598\,960 \approx 0.001441$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with a full house. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select a kind of card: **13**
b. Select 3 cards of the kind in (a): $\binom{4}{3}$
c. Select another kind of card: **12**
d. Select 2 cards of the kind in (c): $\binom{4}{2}$

a) udvælge en størrelse: K(13,1) = 13
b) udvælg de 3 kort af samme størrelse: K(4,3) = 4
c) udvælg den anden størrelse: K(12,1) = 12
d) udvælg de 2 kort af samme størrelse: K(4,2)

$$P(\mathit{full\ house}) = \frac{K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,1)\cdot K(4,2)}{K(52,5)}$$

> $K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,1)\cdot K(4,2)$

$$3744 \tag{7.1}$$

> $P7 := \frac{K(13,1)\cdot K(4,3)\cdot K(12,1)\cdot K(4,2)}{K(52,5)}; \mathit{evalf}(\%)$

$$P7 := \frac{6}{4165}$$

$$0.001440576230 \tag{7.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **full house** som pokerhånd er $\frac{3744}{2598960} \approx 0.00144 = 0.144\ \%$

Fire ens

7. *Four of a Kind*. The hand has 4 cards of one kind, and 1 card of another kind.

10. $\mathbb{P}(V = 7) = 624/2\,598\,960 \approx 0.000240$.

▼ *Proof:*

The following steps form an algorithm for generating poker hands with four of a kind. The number of ways of performing each step is also given.

a. Select a kind of card: **13**
b. Select 4 cards of the kind in (a): **1**
c. Select another kind of card: **12**
d. Select a card of the kind in (c): **4**

a) udvælge en størrelse: K(13,1) = 13
b) udvælg de 4 kort af samme størrelse: K(4,4) = 1
c) udvælg den anden størrelse: K(12,1) = 12
d) udvælg kortet af denne størrelse: K(4,1) = 4

$$P(\textit{fire ens}) = \frac{K(13,1)\cdot K(4,4)\cdot K(12,1)\cdot K(4,1)}{K(52,5)}$$

> $K(13,1)\cdot K(4,4)\cdot K(12,1)\cdot K(4,1)$

$$624 \tag{8.1}$$

> $P8 := \frac{K(13,1)\cdot K(4,4)\cdot K(12,1)\cdot K(4,1)}{K(52,5)}; \textit{evalf}(\%)$

$$P8 := \frac{1}{4165}$$

$$0.0002400960384 \tag{8.2}$$

Konklusion: sandsynligheden for **fire ens** som pokerhånd er $\frac{1}{4165} \approx 0.000240 = 0.0240\ \%$

Højt kort, dvs. ingen af ovenstående hænder

0. *No Value*. The hand is of none of the other types.

11. $\mathbb{P}(V = 0) = 1\,302\,540/2\,598\,960 \approx 0.501177$.

▼ *Proof:*

By the complement rule, $\mathbb{P}(V = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(V = k)$

> $P0 := 1 - P1 - P2 - P3 - P4 - P5 - P6 - P7 - P8; \textit{evalf}(\%)$

$$P0 := \frac{1277}{2548}$$

$$0.5011773940 \tag{9.1}$$

Konklusion: sandsynligheden for **højt kort** som pokerhånd er $\frac{1277}{2548} \approx 0.501 = 50.1\ \%$