1. Differentialligningen $y' = k \cdot y$

Sætning:
Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = k \cdot y$ er givet ved $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, hvor $c \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant

Bevis:

1. Vise at alle funktioner af typen $y = c \cdot e^{k \cdot x}$ er løsninger

Antag, at $y = c \cdot e^{k \cdot x}$
Ved differentiation får vi:
Venstre side: $y' = \boldsymbol{c \cdot e^{k \cdot x} \cdot k}$
Højre side: $k \cdot y = k \cdot \left(c \cdot e^{k \cdot x}\right) = \boldsymbol{k \cdot c \cdot e^{k \cdot x}}$

Så det stemmer.

2. Vise at enhver løsning er af typen $y = c \cdot e^{k \cdot x}$

Antag, at y er en løsning til differentialligningen $y' = k \cdot y$

Tænke-boks: "isoler c"
$y = c \cdot e^{k \cdot x} \Leftrightarrow c = y \cdot e^{-k \cdot x}$
Definer en ny variabel: $\boldsymbol{z = y \cdot e^{-k \cdot x}}$
NB: Vi skal vise, at z er konstant! Det gøres ved at vise, at z' = 0 overalt.

$z = y \cdot e^{-k \cdot x} \Rightarrow z' = y' \cdot e^{-k \cdot x} + y \cdot e^{-k \cdot x} \cdot (-k) = (y' - k \cdot y) \cdot e^{-k \cdot x}$

Da y løser differentialligningen, får vi at: $z' = (k \cdot y - k \cdot y) \cdot e^{-k \cdot x} = 0 \cdot e^{-k \cdot x} = 0$, dvs. $z' = 0$ for alle x.
Men så er z konstant, dvs. $z = c$, hvor $c \in \mathbb{R}$

Indsætter vi definitionen på den nye variabel z, får vi:
$c = y \cdot e^{-k \cdot x} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{k \cdot x}$
Dvs. y kan skrives som påstået i sætningen.

2. Differentialligningen $y' = b - a \cdot y$

Sætning:
Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = b - a \cdot y$ er givet ved $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$, hvor $c \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant

Bevis:

1. Vise at alle funktioner af typen $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$ er løsninger

Antag, at $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$

Ved differentiation får vi:

Venstre side: $y' = 0 + c \cdot e^{-a \cdot x} \cdot (-a) = \boldsymbol{-a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x}}$

Højre side: $b - a \cdot y = b - a \cdot \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} \right) = b - b - a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x} = \boldsymbol{-a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x}}$

Så det stemmer.

2. Vise at enhver løsning er af typen $\boldsymbol{y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}}$

Antag, at y er en løsning til differentialligningen $y' = b - a \cdot y$

Tænke-boks: "isoler c"

$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} \Leftrightarrow y - \frac{b}{a} = c \cdot e^{-a \cdot x} \Leftrightarrow \left(y - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{a \cdot x} = c$

Definer en ny variabel: $\boldsymbol{z = \left(y - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{a \cdot x}}$

NB: Vi skal vise, at z er konstant! Det gøres ved at vise, at z' = 0 overalt.

$z = \left(y - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{a \cdot x} \Rightarrow$

$z' = (y' - 0) \cdot e^{a \cdot x} + \left(y - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = y' \cdot e^{a \cdot x} + (a \cdot y - b) \cdot e^{a \cdot x} = (y' + a \cdot y - b) \cdot e^{a \cdot x}$

Da y løser differentialligningen, får vi at: $z' = ((b - a \cdot y) + a \cdot y - b) \cdot e^{a \cdot x} = 0 \cdot e^{a \cdot x} = 0$, dvs. $z' = 0$ for alle x.

Men så er z konstant, dvs. $z = c$, hvor $c \in \mathbb{R}$

Indsætter vi definitionen på den nye variabel z, får vi:

$c = \left(y - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{a \cdot x} \Leftrightarrow c \cdot e^{-a \cdot x} = y - \frac{b}{a} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$

Dvs. y kan skrives som påstået i sætningen.