Lineær 1. ordens differentialligning

$y' + a(x)\cdot y = b(x) \Leftrightarrow y' = -a(x)\cdot y + b(x)$
er **lineær** i y (men ikke nødvendigvis i x)

Sætning 14 (side 52 + 205):

$y' + a(x)\cdot y = b(x)$ har den fuldstændige løsning

$y(x) = e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + c\cdot e^{-A(x)}$, hvor $c \in \mathbb{R}$

og $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$.

Bevis:

1) Gøre prøve:

Laver prøve med den påståede løsning.

$$\boldsymbol{y = e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + c\cdot e^{-A(x)}} \Rightarrow$$

$$y' = \left(e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx\right)' + \left(c\cdot e^{-A(x)}\right)' =$$

$$\left(e^{-A(x)}\right)'\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + e^{-A(x)}\cdot\left(\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx\right)' + c\cdot\left(e^{-A(x)}\right)' =$$

$$e^{-A(x)}\cdot(-a(x))\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + e^{-A(x)}\cdot\left(b(x)\cdot e^{A(x)}\right) + c\cdot e^{-A(x)}\cdot(-a(x)) =$$

$$\boldsymbol{-e^{-A(x)}\cdot a(x)\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + b(x) - c\cdot e^{-A(x)}\cdot a(x)}$$

$$y' + a(x)\cdot y =$$

$$\left(-e^{-A(x)}\cdot a(x)\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + b(x) - c\cdot e^{-A(x)}\cdot a(x)\right) + a(x)\cdot\left(e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + c\cdot e^{-A(x)}\right) =$$

$$-e^{-A(x)}\cdot a(x)\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + b(x) - c\cdot e^{-A(x)}\cdot a(x) + a(x)\cdot e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + a(x)\cdot c\cdot e^{-A(x)}$$

$$= b(x)$$

Da resten går ud!
Dvs. den påståede formel for løsning ER FAKTISK alle en løsning.

2) Ny variabel:

Antag at y er en løsning til differentialligningen, dvs. at $\boldsymbol{y' + a(x)\cdot y = b(x)}$.

Indfører en ny variabel $z = y\cdot e^{A(x)}$, dvs. $z(x) = y(x)\cdot e^{A(x)}$
Undersøger z':
$z' = \left(y\cdot e^{A(x)}\right)' = y'\cdot e^{A(x)} + y\cdot\left(e^{A(x)}\right)' = y'\cdot e^{A(x)} + y\cdot e^{A(x)}\cdot(A(x))' =$
$y'\cdot e^{A(x)} + y\cdot e^{A(x)}\cdot a(x) = (y' + a(x)\cdot y)\cdot e^{A(x)}$
dvs. $z' = b(x)\cdot e^{A(x)}$

Men så kan z findes som stamfunktion: $z = \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c$

$z(x) = y(x) \cdot e^{A(x)} \Leftrightarrow$

$\int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c = y(x) \cdot e^{A(x)} \Leftrightarrow y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \right) \Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}}}$$

EXTRA overvejelse

Hvilken betydning har det, at man medtager en integrationskonstant i stamfunktion $A(x)$ til $a(x)$?

I formlen $y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}$ prøver vi at erstatte $A(x)$ med $A(x) + k$:

$y(x) = e^{-(A(x) + k)} \cdot \int b(x) \cdot e^{(A(x) + k)}\, dx + c \cdot e^{-(A(x) + k)}$

som omskrives til:

$y(x) = e^{-A(x) - k} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x) + k} dx + c \cdot e^{-A(x) - k} = e^{-A(x)} \cdot e^{-k} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} \cdot e^{k}\, dx + c \cdot e^{-A(x)} \cdot e^{-k}$

Her kan e^k sættes udenfor integraltegnet, så vi får:

$y(x) = e^{-A(x)} \cdot e^{-k} \cdot e^{k} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} dx + c \cdot e^{-k} \cdot e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} dx + c_1 \cdot e^{-A(x)}$

idet $e^{-k} \cdot e^{k} = e^0 = 1$, og $c \cdot e^{-k}$ kaldes for c_1. Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$.

Løsningen bliver nøjagtig den samme som før!

Så addition af en konstant ved stamfunktionsbestemmelsen $A(x)$ giver samme løsningsformel.