ELASTICITETSBEGREBET I ØKONOMI

Økonomer anvender differentialregning, idet differentialkvotienter og differentialer fortæller hvordan noget vil ændre sig med tiden.
Ofte foretrækker økonomer at anvende begrebet **elasticitet** i stedet for differentialkvotient.
Tilsvarende taler de om "at elasticitere", hvor vi normalt nøjes med "at differentiere".
I dette projekt skal vi undersøge elasticitetsbegrebet.

Lad *f(x)* være en differentiabel funktion af *x*.

Definition: Elasticiteten af *f* mht. *x* defineres som $\boxed{El_x(f) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$

I definitionen indgår *f´(x)*, dvs. differentialkvotienten.

Nedenstående sammenligning viser, at *f´(x)* og $El_x(f)$ **er nær beslægtet**, og derfor må regnereglerne for begge begreber være rimelig ens!

Differentialkvotienten $f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$

f´(x) udtrykker grænseværdien af forholdet mellem de <u>absolutte</u> tilvækster i *f* og i *x*.

Elasticiteten $El_x(f) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{f} \cdot \frac{df}{dx} = \frac{x}{f} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}\right)$

$El_x(f)$ udtrykker grænseværdien af forholdet mellem de <u>relative</u> (procentiske) tilvækster i *f* og i *x*.

Ved lidt omskrivning kan vi se, at også **logaritmefunktionen** indgår! Og derfor får vi brug for logaritme-regnereglerne ved opstilling af formler for elasticiteten.

$$El_x(f) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx} = x \cdot \frac{d(\ln(f))}{dx} = \frac{d(\ln(f))}{\frac{1}{x} \cdot dx} = \frac{d(\ln(f))}{d(\ln(x))}$$

(her er anvendt regnereglen for sammensat differentiation)
Det læses således: Elasticiteten er *ln(f)* differentieret mht. *ln(x)*.

<u>Elasticiteten af grundlæggende funktioner</u>:

NB: *Vi får brug for den afledede af den naturlige logaritme-funktion, eksponential-funktionen, sinus-funktionen og cosinus-funktionen:*

$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$ $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)}$ $\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$ $\boxed{(\cos(x))' = -\sin(x)}$

Opgave 1:

Ud fra definitionen af $El_x(f)$ og de almindelige formler for differentiation af grundlæggende funktioner skal du **beregne** (med håndkraft) elasticiteten af følgende 10 funktioner:

k	x	x^n	$b \cdot x^a$	e^x
$b \cdot a^x$	$a \cdot x + b$	$ln(x)$	$sin(x)$	$cos(x)$

Skriv resultatet i en tabel med 3 kolonner:

$f(x)$	$f'(x)$	$El_x(f)$
k	0	0
osv.	*osv.*	*osv.*

Opgave 2:

Lav en funktion ***el*** i Maple, som beregner elasticiteten af funktionen *f* mht. *x*.

$$el := f \rightarrow \frac{x}{f} \cdot \frac{d}{dx} f$$

Test den på funktionerne i opgave 1.

<u>Regneregler for elasticitet</u>:

Ud fra formlerne for differentiation skal vi udlede formler for elasticitering.

Regel for konstant gange en funktion:

$$El_x(k \cdot f) = \frac{x}{k \cdot f} \cdot (k \cdot f)' = \frac{x}{k \cdot f} \cdot k \cdot f' = \frac{x}{f} \cdot f' = \underline{\underline{El_x(f)}}$$

Så en *multiplikativ* konstant forsvinder ved elasticitering!

Regel for brøk:

$$El_x\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{x}{\left(\frac{f}{g}\right)} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{x}{\left(\frac{f}{g}\right)} \cdot \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} = \frac{x}{\left(\frac{f}{\cancel{g}}\right)} \cdot \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^{\cancel{2}}} =$$

$$x \cdot \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{f \cdot g} = x \cdot \left(\frac{f' \cdot g}{f \cdot g} - \frac{f \cdot g'}{f \cdot g}\right) = x \cdot \left(\frac{f' \cdot \cancel{g}}{f \cdot \cancel{g}} - \frac{\cancel{f} \cdot g'}{\cancel{f} \cdot g}\right) = x \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) =$$

$$x \cdot \frac{f'}{f} - x \cdot \frac{g'}{g} = \frac{x}{f} \cdot f' - \frac{x}{g} \cdot g' = \underline{\underline{El_x(f) - El_x(g)}}$$

Dvs. at $El_x\left(\frac{f}{g}\right) = El_x(f) - El_x(g)$. En meget simpel regel!

Det er pga. logaritmen, at produkt og division har simple elasticiteringsregler.

Regel for sammensat funktion:

$$El_x(g(f(x))) = \frac{x}{g(f(x))} \cdot \left(g(f(x)\right)' = \frac{x}{g(f(x))} \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$\frac{f(x)}{g(f(x))} \cdot g'(f(x)) \cdot \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(f(x))} \cdot g'(f(x))\right] \cdot \left[\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)\right] = \underline{\underline{El_f(g) \cdot El_x(f)}}$$

Opgave 3:

Beregn de 4 formler, som er markeret nedenfor. Opskriv formlerne i nedenstående tabel:

funktion	*differentialkvotient*	*elasticitet*
$k \cdot f$	$k \cdot f'$	$El_x(f)$
$f+k$	f'	***BEVIS***
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	***BEVIS***
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$El_x(f) - El_x(g)$
$f+g$	$f' + g'$	$\frac{f \cdot El_x(f) + g \cdot El_x(g)}{f+g}$ ***BEVIS***
$f - g$	$f' - g'$	***BEVIS***
$g \circ f = g(f)$	$g'(f) \cdot f'$	$El_f(g) \cdot El_x(f)$

Bemærk, at det således er de *multiplikative* formler, som bliver lette; mens de *additive* formler bliver bøvlede!
Reglen for sammensat elasticitering minder meget om sammensat differentiation.

Opgave 4:

I nedenstående 5 eksempler skal du beregne elasticiteten på 3 forskellige måder.

- Beregn resultatet direkte ud fra definitionen af elasticitet.
- Brug ovenstående formler for elasticitering til at beregne elasticiteten
- Benyt den indtastede funktion ***el*** i Maple

$7 \cdot e^x$	$x+2$	$x^3 \cdot e^x$	$\frac{2 \cdot x}{e^x}$	*ln(sin(x))*

Opskriv resultaterne i en overskuelig tabel.

<u>Anvendelse af elasticitet indenfor økonomi</u>:

I et *ekstremumspunkt* (maksimum eller minimum) er som bekendt *f´(x)* = 0.
Differentialkvotienten er 0, fordi tangenten er vandret i et ekstremumspunkt, så hældningskoefficienten af tangenten er 0.

Lad *x* betyde *prisen* på en vare, og *f(x)* betyde den *afsatte mængde* af varen (f.eks. i stk. eller kg.).

Omsætningen *O(x)* beregnes da som: $O(x) = x \cdot f(x)$

Maksimum af omsætningen *O(x)* findes så, når *O´(x)* = 0.

$$O(x) = x \cdot f(x) \quad \Rightarrow$$

$$O'(x) = \left(x \cdot f(x)\right)' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$$

Dette udtryk kan omskrives, så elasticiteten indgår:

$$O'(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) \cdot \left(1 + \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)\right) = f(x) \cdot \left(1 + El_x(f)\right)$$

$$O'(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \cdot \left(1 + El_x(f)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{f(x) = 0} \quad \vee \quad 1 + El_x(f) = 0 \quad \Leftrightarrow$$ (den afsatte mængde *f(x)* er ikke 0 i maksimum af afsætningen!)

$$\underline{\underline{El_x(f) = -1}}$$

Omsætningen er altså maksimal, når pris-elasticiten af afsætningen er –1.

Undersøger man fortegnede i beregningen ovenfor, indser man let at:

$El_x(f) < -1$ så er *omsætningen faldende*

$El_x(f) > -1$ så er *omsætningen stigende*

Dvs. en fabrikant kan øge omsætningen ved at hæve prisen indtil priselasticiteten er –1.

<u>Eksempler</u>:

Hvis en vare er en ’nødvendighed’ for forbrugerne, og der ikke findes alternative varer, så er pris-elasticiteten > -1.
F.eks. **strøm**: svært at spare eller finde erstatningsvare.

Hvis en vare sagtens kan ombyttes med en anden vare, så er pris-elasticiteten < -1.
F.eks. **æbler**: man kan købe pærer eller anden frugt.