Vektorregning og geometri i planen

Kapitel 4 side 76-131

Definition: vektor har både retning og længde.
En vektor kan parallelforskydes, dvs. afsættes fra et vilkårligt punkt.

Notation: pil henover symbolet, f.eks. $\vec{a}$

Koordinater: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

Regneoperationer: sum $\vec{a} + \vec{b}$, faktor $k\vec{a}$, modsatte vektor $-\vec{a}$, differens $\vec{b} - \vec{a}$
Regner koordinatvis.
Geometrisk: sum svarer til kræfternes parallelogram

Regneregler: kommutative lov, associative lov, distributive love gælder (side 86)

Stedvektor: $\overrightarrow{OP}$ har samme koordinater som punktet P

Vektor mellem 2 punkter: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$

Indskudsreglen: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (man kan indskyde et vilkårligt punkt B, jvf. sum af 2 vektorer)

Afstand mellem 2 punkter: $dist(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
(kommer direkte fra Pythagoras' sætning)
• Formel for *punktet midt* mellem 2 punkter
• Formel for *medianernes* skæringspunkt

Opløsning af vektor efter 2 retninger: $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$
(komposanterne er $s\vec{a}$ og $t\vec{b}$)

Skalarproduktet (prikproduktet): $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Regneregler for skalarprodukt): side 100 sætning 24

Vinkel mellem 2 vektorer: $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

Ortogonale vektorer: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$: $\vec{a}_b = \left(\dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$

Tværvektor ($\vec{a}$ drejet 90 grader): $\hat{\vec{a}} = \widehat{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$

Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$: $det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

Parallelle vektorer: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$

Regneregler determinant: side 110 sætning 30

Areal af parallelogram: $\left|det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$

Areal af trekant: $\dfrac{1}{2} \cdot \left|det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$

Carlsberg-formlen: løsning af 2 lineære ligninger med 2 ubekendte
$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$ og $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

$$(x, y) = \left(\frac{det\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}, \frac{det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} \right)$$

Ret linje: $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ **normalvektor (ligning),** $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ **retningsvektor (parameterfremstilling)**

$a \cdot \left(x - x_0\right) + b \cdot \left(y - y_0\right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Vinkel mellem 2 linjer = vinkel mellem normalvektorerne eller mellem retningsvektorerne.

Skæring mellem 2 linjer:
a) hvis 2 ligninger, så brug Carlsberg-formlen
b) hvis 2 parameterfremstillinger, så sættes de 2 parameterfremstillinger lig hinanden, ...
c) hvis 1 ligning + 1 parameterfremstilling, så indsættes parameterfremstillingen i ligningen

Projektion af punkt på linje: laver en parameterfremstilling for normalen gennem punktet, og finder så skæringen mellem de 2 linjer

Afstand fra punkt til linje: $dist(Q, l) = \dfrac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
hvor punktet $Q = (x_0, y_0)$ og linjen l med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

Cirklens ligning: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
hvor centrum $C = (x_0, y_0)$ og radius $= r$

NB: tangenten står vinkelret på linjen/vektoren gennem centrum og røringspunktet