χ^2-test "uafhængighed"

Automatisk gennemregning med beregning af de forventede værdier

I nedenstående opgave skal de farvede felter tilpasses den enkelte opgave.
Derefter gennemregnes opgaven med !!!

Opgave 1 (vejledende eksamensopgaver i hypotesetest)

Vejledende opgaver i hypotesetest og χ^2-test til STX matematik A- og B-niveau:
http://kortlink.dk/km4f

I nedenstående tabel ses resultaterne af samtlige hjerteklapoperationer i 2007-08 ved Odense Universitetshospital (OUH) sammenlignet med resultaterne ved landets øvrige hjertecentre.

	Død indenfor 30 dage efter operation	Overlevet de første 30 dage
OUH	11	206
De øvrige hjertecentre	32	1374

a) Undersøg på 5%-signifikansniveau, om dødelighed indenfor 30 dage efter en hjerteklapoperation er ens ved OUH og de øvrige hjertecentre.

b) Hvad ville resultatet være blevet, hvis vi havde valgt et signifikansniveau på 1%? Inddrag det statistiske begreb skjulte variable i din kommentar til resultatet.

Kilde: http://www.si-folkesundhed.dk/upload/dhr2008.pdf

a)

Der udføres en **χ^2-test af typen "uafhængighed"**

Nulhypotese HYP_0: Dødeligheden ved hjerteoperation på OUH afviger ikke fra dødeligheden på andre sygehuse.

```
> restart
```

Pakke til matrix-beregninger:

```
> with(LinearAlgebra) :
```

Observerede værdier:

De givne observerede data indtastes i en **matrix** *OBS* (brug paletten "Matrix") :

> $OBS := \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix}$

$$OBS := \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Antal rækker bestemmes:

> $r := RowDimension(OBS)$

$$r := 2 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Antal søjler bestemmes:

> $s := ColumnDimension(OBS)$

$$s := 2 \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Forventede værdier:

De forventede vædier skal nu beregnes.

En tom matrix $FORV$ til de forventede værdier oprettes:

> $FORV := Matrix(r, s)$

$$FORV := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.4)}$$

De vandrette summer beregnes på *OBS*-matricen:
NB: Maple-teknisk skal der enkeltgåseøjne om variable!

> **for** i **from** 1 **to** r **do** $SumV := i \rightarrow \sum_{t=1}^{s} ('OBS'[i, t])$: **end do**:
> **for** i **from** 1 **to** r **do** $SumV(i)$ **end do**

$$\begin{matrix} 217 \\ 1406 \end{matrix} \quad \textbf{(1.1.5)}$$

De lodrette summer beregnes på *OBS*-matricen:
NB: Maple-teknisk skal der enkeltgåseøjne om variable!

> **for** i **from** 1 **to** s **do** $SumL := i \rightarrow \sum_{t=1}^{r} ('OBS'[t, i])$: **end do**:
> **for** i **from** 1 **to** s **do** $SumL(i)$ **end do**

$$\begin{matrix} 43 \\ 1580 \end{matrix} \quad \textbf{(1.1.6)}$$

Samlede antal beregnes ud fra de vandrette summer:
NB: Maple-teknisk skal der enkeltgåseøjne om variable!

> $SumIalt := \sum_{t=1}^{r} 'SumV(t)'$

$$SumIalt := 1623 \quad \textbf{(1.1.7)}$$

eller ud fra de lodrette summer:
NB: Maple-teknisk skal der enkeltgåseøjne om variable!

> $SumIalt := \sum_{t=1}^{s} 'SumL(t)'$

$$SumIalt := 1623 \tag{1.1.8}$$

De forventede værdier beregnes med formlen $\frac{\textbf{\textit{vandret sum}}}{\textbf{\textit{sum ialt}}} \cdot \textbf{\textit{lodret sum}}$, og fyldes ind i matricen $FORV$:

```
> for i from 1 to r do
    for j from 1 to s do
      FORV[i,j] := SumV(i)/SumIalt·SumL(j)
    end do
  end do
```

Matricen $FORV$ indeholder nu de forventede værdier:

```
> FORV; evalf(%)
```

$$\begin{bmatrix} \frac{9331}{1623} & \frac{342860}{1623} \\ \frac{60458}{1623} & \frac{2221480}{1623} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5.749229821 & 211.2507702 \\ 37.25077018 & 1368.749230 \end{bmatrix} \tag{1.1.9}$$

En udvidet matrix $FORVsum$ med de forventede værdier og summerne vandret og lodret opbygges (en række og en søjle mere).
Starter med en tom matrix (0'er på alle pladser):

```
> FORVsum := Matrix(r+1, s+1)
```

$$FORVsum := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.10}$$

Først indsættes $FORV$-matricen i den nye matrix $FORVsum$:

```
> for i from 1 to r do
    for j from 1 to s do
      FORVsum[i,j] := FORV[i,j]
    end do
  end do
```

```
> FORVsum
```

$$\begin{bmatrix} \frac{9331}{1623} & \frac{342860}{1623} & 0 \\ \frac{60458}{1623} & \frac{2221480}{1623} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.11}$$

Så indsættes de lodrette summer:

```
> for j from 1 to s do FORVsum[r+1,j] := SumL(j) end do
```

$$FORVsum_{3,\,1} := 43$$

$$FORVsum_{3,\,2} := 1580 \qquad \textbf{(1.1.12)}$$

> *FORVsum*

$$\begin{bmatrix} \frac{9331}{1623} & \frac{342860}{1623} & 0 \\ \frac{60458}{1623} & \frac{2221480}{1623} & 0 \\ 43 & 1580 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.13)}$$

Så indsættes de vandrette summer:

> **for** *i* **from** 1 **to** *r* **do** $FORVsum[i, s+1] := SumV(i)$ **end do**

$$FORVsum_{1,\,3} := 217$$

$$FORVsum_{2,\,3} := 1406 \qquad \textbf{(1.1.14)}$$

> *FORVsum*

$$\begin{bmatrix} \frac{9331}{1623} & \frac{342860}{1623} & 217 \\ \frac{60458}{1623} & \frac{2221480}{1623} & 1406 \\ 43 & 1580 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.15)}$$

Endelig indsættes den samlede sum:

> $FORVsum[r+1, s+1] := SumIalt$

$$FORVsum_{3,\,3} := 1623 \qquad \textbf{(1.1.16)}$$

> *FORVsum*; *evalf*(%)

$$\begin{bmatrix} \frac{9331}{1623} & \frac{342860}{1623} & 217 \\ \frac{60458}{1623} & \frac{2221480}{1623} & 1406 \\ 43 & 1580 & 1623 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5.749229821 & 211.2507702 & 217. \\ 37.25077018 & 1368.749230 & 1406. \\ 43. & 1580. & 1623. \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.17)}$$

De forventede værdier opskrevet på skemaform (afrundede tal):
NB: her kunne man opleve, at vandrette eller lodrette summer ikke helt passer pga. afrundede tal.

Forventede værdier	Død indenfor 30 dage efter operat	Overlevet de første 30 dage efter	Sum

	ionen	operationen	
OUH	6	211	217
Øvrige hospitaler	37	1369	1406
Sum	43	1580	1623

En **stokastisk variabel** X, som er **χ^2-fordelt**, oprettes:

```
> with(Statistics):
> X := RandomVariable(ChiSquare(ν)):
```

Antal frihedsgrader ν beregnes som $(antal\ rækker - 1)\cdot(antal\ søjler - 1)$:

```
> ν := (r-1)·(s-1)
```

$$\nu := 1 \qquad \textbf{(1.1.18)}$$

χ^2-teststørrelsen Q beregnes som summen af alle størrelserne $\frac{(observerede\ værdi - forventet\ værdi)^2}{forventet\ værdi}$.

NB: Maple-teknisk skal der dobbelte enkeltgåseøjne om variable!

```
> Q := sum(sum(("OBS"[k,m]-"FORV"[k,m])^2/"FORV"[k,m], m=1..s), k=1..r); evalf(%)
```

$$Q := \frac{29467384383}{5182157470}$$

$$5.686315893 \qquad \textbf{(1.1.19)}$$

p-værdien beregnes:

NB: p-værdien angiver sandsynligheden for at X antager en værdi, som er større end eller lig med Q.

```
> pVÆRDI := 1 - CDF(X, Q): evalf(%)
```

$$0.01709771278 \qquad \textbf{(1.1.20)}$$

Signifikans-niveauet for χ^2-testen angives:

```
> Signifikansniveau := 0.05
```

$$Signifikansniveau := 0.05 \qquad \textbf{(1.1.21)}$$

Den **kritiske værdi *q*** beregnes:

```
> q := Quantile(X, 1 - Signifikansniveau): evalf(%)
```

$$3.84145606580278 \qquad \textbf{(1.1.22)}$$

Graf over **χ^2-fordelingens frekvensfunktion** med **grøn** farve:

```
> plotPDF := plot(PDF(X, x), x=0..10, color=green, view=[0..10, 0..0.4]):
```

Markering af χ^2**-teststørrelsen** Q med en lodret **blå** streg:

```
> plotQ := plot([Q, t, t = 0..0.1], color = blue, view = [0..10, 0..0.4]):
```

Markering af den **kritiske værdi** q med en lodret **rød** streg:

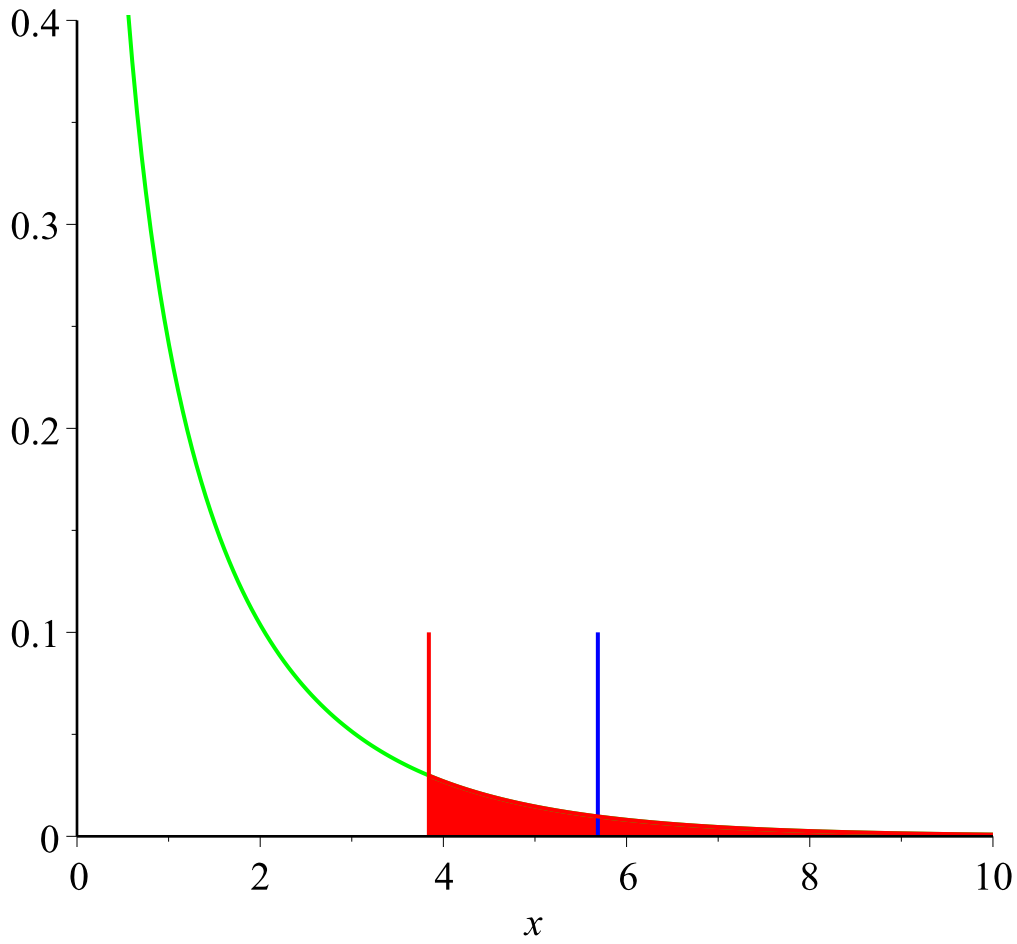
```
> plotq := plot([q, t, t = 0..0.1], color = red, view = [0..10, 0..0.4]):
```

Graf over den **kritiske mængde** med **rødt** område:

```
> plotKRITISKMÆNGDE := plot(PDF(X, x), x = q..10, view = [0..10, 0..0.4], filled, color
      = red, caption
      = "Kritisk mængde er farvet rødt, og Q er markeret som en lodret blå streg"):
```

Graferne tegnes i samme koordinatsystem:

```
> with(plots):
> display(plotPDF, plotQ, plotq, plotKRITISKMÆNGDE)
```



Kritisk mængde er farvet rødt, og Q er markeret som en lodret blå streg

Ud fra ovenstående beregninger kan vi **konkludere vedr. nulhypotesen**:

```
> if evalf(pVÆRDI) > Signifikansniveau then print(Nulhypotesen accepteres)
      else print(Nulhypotesen forkastes) end if
```

Nulhypotesen forkastes **(1.1.23)**

Alternativt:

```
> if evalf(Q) < q then print(Nulhypotesen accepteres) else print(Nulhypotesen forkastes)
      end if
```

Nulhypotesen forkastes **(1.1.24)**

Da p-værdien er ca. 1.7%, som er mindre end signifikansniveauet på 5%, så forkastes nulhypotesen.

Alternativt:

Da χ^2-teststørrelsen $Q \approx 5.69$ er større end den kritiske værdi $q \approx 3.84$, så forkastes nulhypotesen.

Konklusion:

OUH har ikke samme dødelighed som de øvrige hospitaler.

Det kan evt. skyldes, at OUH modtager de meget svage patienter og de komplicerede tilfælde. Disse vil have større dødelighed.

b)

Nyt signifikansniveau:

```
> Signifikansniveau := 0.01
```

Signifikansniveau := 0.01 **(1.2.1)**

Den **kritiske værdi** ***q*** beregnes:

```
> q := Quantile(X, 1 − Signifikansniveau) : evalf(%)
```

6.63489585916479 **(1.2.2)**

Markering af den **kritiske værdi** ***q*** med en lodret **rød** streg:

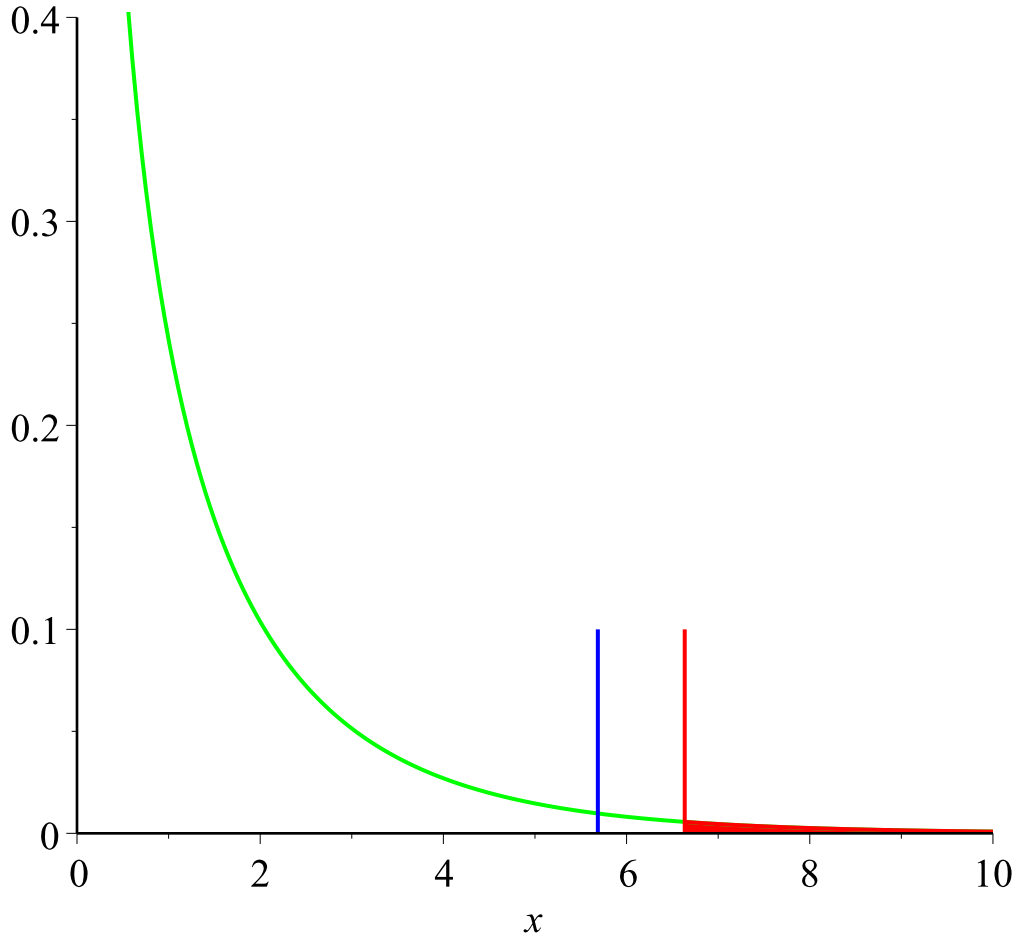
```
> plotq := plot([q, t, t = 0..0.1], color = red, view = [0..10, 0..0.4]) :
```

Graf over den **kritiske mængde** med rødt område:

```
> plotKRITISKMÆNGDE := plot(PDF(X, x), x = q..10, view = [0..10, 0..0.4], filled, color
      = red, caption
      = "Kritisk mængde er farvet rødt, og Q er markeret som en lodret blå streg") :
```

Graferne tegnes i samme koordinatsystem:

```
> with(plots) :
> display(plotPDF, plotQ, plotq, plotKRITISKMÆNGDE)
```



Kritisk mængde er farvet rødt, og Q er markeret som en lodret blå streg

> **if** *evalf*(*pVÆRDI*) > *Signifikansniveau* **then** *print*(*Nulhypotesen accepteres*) **else** *print*(*Nulhypotesen forkastes*) **end if**

Nulhypotesen accepteres **(1.2.3)**

Alternativ:

> **if** *evalf*(*Q*) < *q* **then** *print*(*Nulhypotesen accepteres*) **else** *print*(*Nulhypotesen forkastes*) **end if**

Nulhypotesen accepteres **(1.2.4)**

Da p-værdien er ca. 1.7%, som er større end signifikansniveauet på 1%, så accepteres nulhypotesen.

Alternativ:

Da χ^2-teststørrelsen $Q \approx 5.69$ er mindre den kritiske værdi $q \approx 6.63$, så accepteres nulhypotesen.

Konklusion:
Dødeligheden på OUH afviger ikke signifikant fra de øvrige hospitaler.

NB: Når man formindsker signifikansniveauet, så vil man oftere acceptere nulhypotesen.