Differentiation (beviser med Maple)

Metode til bestemmelse af differentialkvotienten

Sekanthældningen: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Tangenthældningen (differentialkvotienten): $f'(x_0)$ fås når $h \to 0$

Dvs. $f'(x_0) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$

Tangent

$f'(x_0)$ er tangentens hældningskoefficient i punktet $(x_0, f(x_0))$

Sætning 1:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2 \cdot x_0$$

> $restart$

> $f := x \to x^2$

$$f := x \to x^2 \quad (3.1)$$

> $f(x0+h)$

$$(x0+h)^2 \quad (3.2)$$

> $f(x0)$

$$x0^2 \quad (3.3)$$

> $f(x0+h) - f(x0)$

$$(x0+h)^2 - x0^2 \quad (3.4)$$

> $factor(\%)$

$$h\,(h+2\,x0) \quad (3.5)$$

> h

$$h \quad (3.6)$$

> $\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$

$$\frac{(x0+h)^2 - x0^2}{h} \quad (3.7)$$

> $simplify(\%)$

$$h + 2\,x0 \quad (3.8)$$

> $\lim_{h \to 0} \%$

$$2\,x0 \quad (3.9)$$

> $\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}\right)$

(3.10)

$$2\,x0 \quad \textbf{(3.10)}$$

Sætning 2:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$$

> restart

> $f := x \rightarrow x^3$

$$f := x \rightarrow x^3 \quad \textbf{(4.1)}$$

> $f(x0 + h)$

$$(x0 + h)^3 \quad \textbf{(4.2)}$$

> $f(x0)$

$$x0^3 \quad \textbf{(4.3)}$$

> $f(x0 + h) - f(x0)$

$$(x0 + h)^3 - x0^3 \quad \textbf{(4.4)}$$

> $factor(\%)$

$$h\,(h^2 + 3\,h\,x0 + 3\,x0^2) \quad \textbf{(4.5)}$$

> h

$$h \quad \textbf{(4.6)}$$

> $\frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h}$

$$\frac{(x0 + h)^3 - x0^3}{h} \quad \textbf{(4.7)}$$

> $simplify(\%)$

$$h^2 + 3\,h\,x0 + 3\,x0^2 \quad \textbf{(4.8)}$$

> $\lim_{h \to 0} \%$

$$3\,x0^2 \quad \textbf{(4.9)}$$

> $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h} \right)$

$$3\,x0^2 \quad \textbf{(4.10)}$$

Sætning 3:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

> restart

> $f := x \rightarrow \frac{1}{x}$

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x} \quad \textbf{(5.1)}$$

> $f(x0 + h)$

$$\frac{1}{x0+h} \quad (5.2)$$

> $f(x0)$

$$\frac{1}{x0} \quad (5.3)$$

> $f(x0+h)-f(x0)$

$$\frac{1}{x0+h}-\frac{1}{x0} \quad (5.4)$$

> $factor(\%)$

$$-\frac{h}{(x0+h)\,x0} \quad (5.5)$$

> h

$$h \quad (5.6)$$

> $\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$

$$\frac{\frac{1}{x0+h}-\frac{1}{x0}}{h} \quad (5.7)$$

> $simplify(\%)$

$$-\frac{1}{(x0+h)\,x0} \quad (5.8)$$

> $\lim_{h\to 0}\%$

$$-\frac{1}{x0^2} \quad (5.9)$$

> $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}\right)$

$$-\frac{1}{x0^2} \quad (5.10)$$

Sætning 4:

$$f(x)=a\cdot x+b \Rightarrow f'(x_0)=a$$

> $restart$

> $f := x \to a\cdot x+b$

$$f := x \to a\,x+b \quad (6.1)$$

> $f(x0+h)$

$$a\,(x0+h)+b \quad (6.2)$$

> $f(x0)$

$$a\,x0+b \quad (6.3)$$

> $f(x0+h)-f(x0)$

$$a\,(x0+h)-a\,x0 \quad (6.4)$$

> $factor(\%)$

$$a\,h \quad (6.5)$$

> h

$$h \quad (6.6)$$

> $\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$

$$\frac{a\,(x0+h)-a\,x0}{h} \quad (6.7)$$

> $simplify(\%)$

$$a \quad (6.8)$$

> $\lim_{h\to 0}\%$

$$a \quad (6.9)$$

> $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}\right)$

$$a \quad (6.10)$$

Sætning 5:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x_0)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}$$

> $restart$

> $f := x\to\sqrt{x}$

$$f := x\to\sqrt{x} \quad (7.1)$$

> $f(x0+h)$

$$\sqrt{x0+h} \quad (7.2)$$

> $f(x0)$

$$\sqrt{x0} \quad (7.3)$$

> $f(x0+h)-f(x0)$

$$\sqrt{x0+h}-\sqrt{x0} \quad (7.4)$$

> $factor(\%)$

$$\sqrt{x0+h}-\sqrt{x0} \quad (7.5)$$

> h

$$h \quad (7.6)$$

> $\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$

$$\frac{\sqrt{x0+h}-\sqrt{x0}}{h} \quad (7.7)$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{\sqrt{x0+h}-\sqrt{x0}}{h} \quad (7.8)$$

Her må vi selv omskrive, da Maple ikke kan finde ud af det!

$$\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x0}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)\cdot h}=\frac{\left(\sqrt{x_0+h}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)\cdot h}$$

$$=\frac{(x_0+h)-x_0}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)\cdot h}=\frac{h}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)\cdot h}=\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

> $\lim_{h\to 0}\%$

$$\frac{1}{2\sqrt{x0}} \quad \textbf{(7.9)}$$

> $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}\right)$

$$\frac{1}{2\sqrt{x0}} \quad \textbf{(7.10)}$$

Differentiation i Maple

> *restart*

Direkte mærke på udtryk

NB: Forudsætter, at der differentieres efter x.

> $(x^2)'$

$$2x \quad \textbf{(8.1.1)}$$

> $(x^3)'$

$$3x^2 \quad \textbf{(8.1.2)}$$

> $\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$-\frac{1}{x^2} \quad \textbf{(8.1.3)}$$

> $(a\cdot x+b)'$

$$a \quad \textbf{(8.1.4)}$$

> $(\sqrt{x})'$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \textbf{(8.1.5)}$$

Definere funktion og sætte mærke

> $f := x \to x^2$

$$f := x \to x^2 \quad \textbf{(8.2.1)}$$

> $(f(x))'$

$$2x \quad \textbf{(8.2.2)}$$

eller:

> $f'(x)$

$$2\,x \quad (8.2.3)$$

> $g := x \rightarrow x^3$

$$g := x \rightarrow x^3 \quad (8.2.4)$$

> $(g(x))'$

$$3\,x^2 \quad (8.2.5)$$

eller:

> $g'(x)$

$$3\,x^2 \quad (8.2.6)$$

> $h := x \rightarrow \frac{1}{x}$

$$h := x \rightarrow \frac{1}{x} \quad (8.2.7)$$

> $(h(x))'$

$$-\frac{1}{x^2} \quad (8.2.8)$$

eller:

> $h'(x)$

$$-\frac{1}{x^2} \quad (8.2.9)$$

> $i := x \rightarrow a \cdot x + b$

$$i := x \rightarrow a\,x + b \quad (8.2.10)$$

> $(i(x))'$

$$a \quad (8.2.11)$$

eller:

> $i'(x)$

$$a \quad (8.2.12)$$

> $j := x \rightarrow \sqrt{x}$

$$j := x \rightarrow \sqrt{x} \quad (8.2.13)$$

> $(j(x))'$

$$\frac{1}{2\,\sqrt{x}} \quad (8.2.14)$$

eller:

> $j'(x)$

$$\frac{1}{2\,\sqrt{x}} \quad (8.2.15)$$

Brug af $\frac{d}{dx}$

> $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x)$

$$2\,x \quad (8.3.1)$$

> $\frac{d}{dx} g(x)$

$$3x^2 \quad \text{(8.3.2)}$$

> $\frac{d}{dx} h(x)$

$$-\frac{1}{x^2} \quad \text{(8.3.3)}$$

> $\frac{d}{dx} i(x)$

$$a \quad \text{(8.3.4)}$$

> $\frac{d}{dx} j(x)$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(8.3.5)}$$

> $\frac{d}{dx} (x^2)$

$$2x \quad \text{(8.3.6)}$$

> $\frac{d}{dx} (x^3)$

$$3x^2 \quad \text{(8.3.7)}$$

> $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right)$

$$-\frac{1}{x^2} \quad \text{(8.3.8)}$$

> $\frac{d}{dx} (a \cdot x + b)$

$$a \quad \text{(8.3.9)}$$

> $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(8.3.10)}$$