Partiel integration

Sætning

Metoden **"partiel integration"** (eller **"delvis integration"**) stammer fra produktreglen for differentiation.

$$\int f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\cdot G(x) - \int f\,'(x)\cdot G(x)\ \mathrm{d}x$$

hvor $G(x) = \int g(x)\ \mathrm{d}x$ er en stamfunktion til $g(x)$.

Bevis

Anvender **integrationsprøven**, dvs. differentierer begge sider, og undersøger om resultaterne er ens.

$$\left(\int f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x\right)' = \left(f(x)\cdot G(x) - \int f\,'(x)\cdot G(x)\ \mathrm{d}x\right)' \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot g(x) = (f(x)\cdot G(x))' - \left(\int f\,'(x)\cdot G(x)\ \mathrm{d}x\right)' \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot g(x) = (f\,'(x)\cdot G(x) + f(x)\cdot G\,'(x)) - f\,'(x)\cdot G(x) \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot G\,'(x) \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x)$$

OK!

I beviset anvender man:
- differentiation af en differens
- produktreglen for differentiation
- at differentiation og integration er omvendte operationer
- at $G(x)$ er stamfunktion til $g(x)$

Anvendelse

Partiel integration erstatter altså et integral med et andet integral.
*Metoden er naturligvis kun brugbar, hvis det andet integral er **lettere** at beregne end det oprindelige integral!*

Der skal være tale om et produkt af 2 funktioner, når partiel integration skal i sving!

I sætningen er $f(x)$ urørt i 1. led, og differentieret i 2. led.
Tilsvarende er $g(x)$ integreret i begge led på højre side.

Det afgørende er så om $f\,'(x)\cdot G(x)$ er lettere at integrere end $f(x)\cdot g(x)$.

Typiske anvendelser:
polynomium·eksponentialfunktion
polynomium·sinusfunktion
polynomium·cosinusfunktion
logaritmefunktion·polynomium

Fordi differentiation af et polynomium giver et nyt polynomium, som er 1 grad lavere!
Og fordi en eksponentialfunktion stort set giver sig selv.

Og sinus/cosinus giver ± den anden funktion.

Sidste eksempel med logaritme er sværere at forstå.
Differentiation af logaritmefunktionen giver ca. $\frac{1}{x}$.
Integration af polynomiet vil godt nok hæve graden med 1.
Men produktet vil være et polynomium af samme grad + evt. et led af typen $\frac{1}{x}$.

Eksempel

$x \cdot e^x$

Partiel integration anvendes:

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + k = \underline{(x-1) \cdot e^x + k}$$

> $\int x \cdot e^x \, dx$

$$(x-1)\, e^x \qquad \textbf{(1.3.1.1)}$$

$x^2 \cdot \sin(x)$

Partiel integration anvendes, men det må gøres 2 gange!

$$\int x^2 \cdot \sin(x) \, dx = x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2 \cdot x \cdot (-\cos(x)) \, dx = -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2 \cdot x \cdot \cos(x) \, dx =$$
$$-x^2 \cdot \cos(x) + \left(2 \cdot x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) \, dx\right) = -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) - 2 \cdot (-\cos(x)) =$$
$$\underline{-x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)} = \underline{(2 - x^2) \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x)}$$

> $\int x^2 \cdot \sin(x) \, dx$

$$-x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2\, x \sin(x) \qquad \textbf{(1.3.2.1)}$$