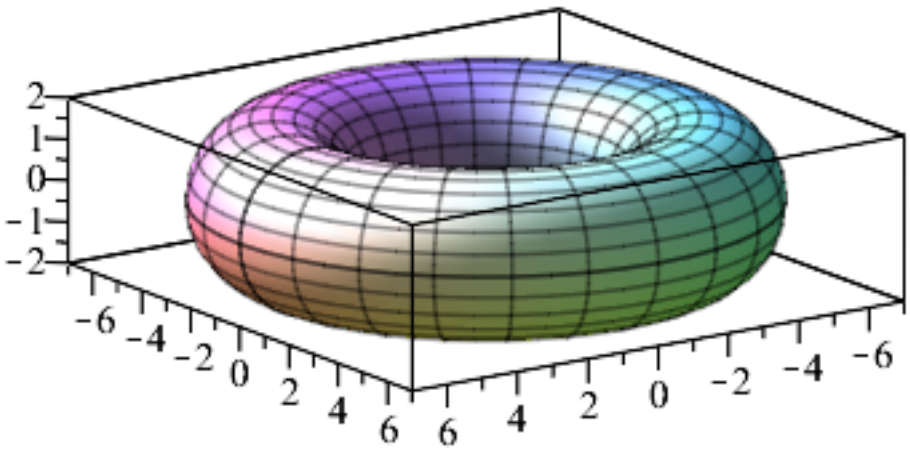
Torus

https://en.wikipedia.org/wiki/Torus

En **torus** fremkommer ved at dreje en cirkel omkring en akse.
r er radius i cirklen. h er radius i omdrejningen.

En torus har form som en badering!

```
> restart
> with(plots) : with(plottools) :
> display(torus([0, 0, 0], 2, 5), scaling = constrained)
```



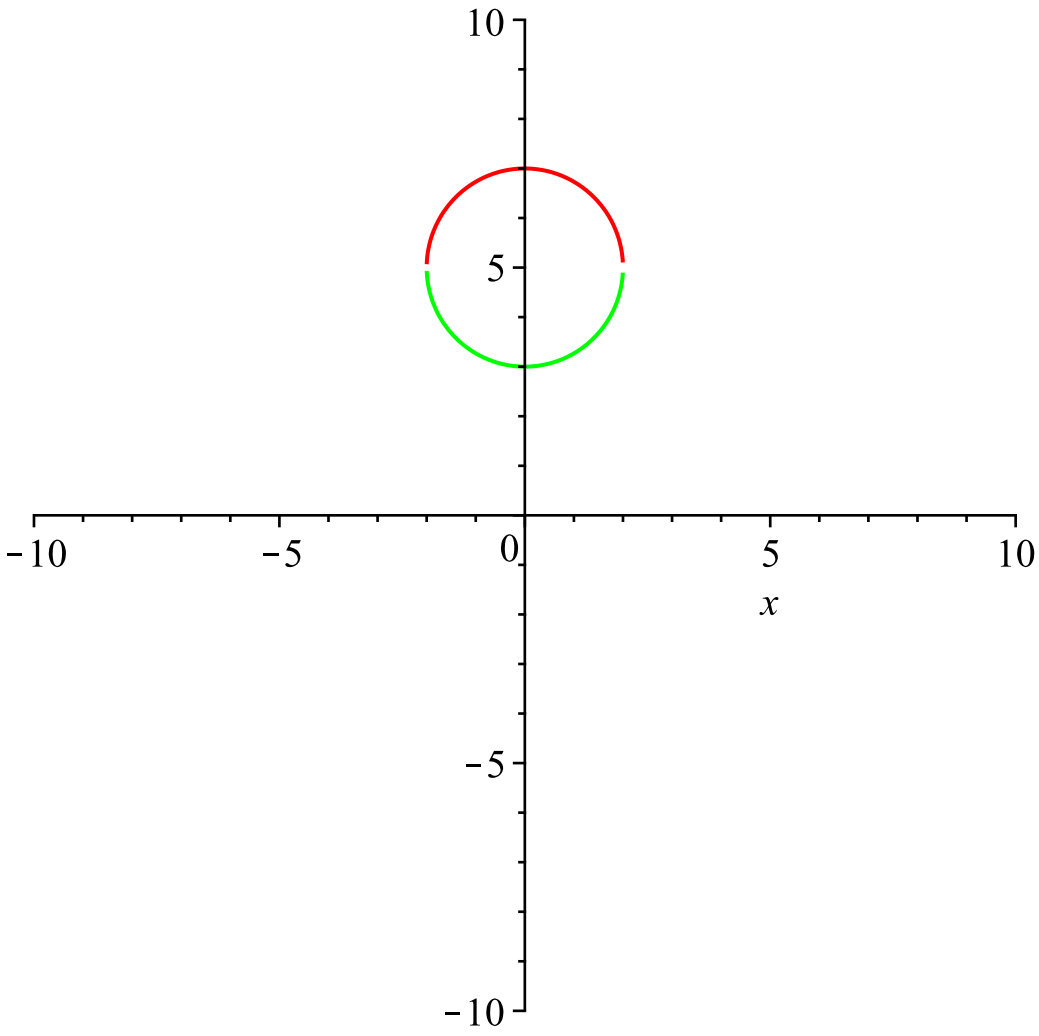

```
> f := x→h + sqrt(r^2 - x^2)
```

$$f := x \mapsto h + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1)$$

```
> g := x→h - sqrt(r^2 - x^2)
```

$$g := x \mapsto h - \sqrt{r^2 - x^2} \quad (2)$$

```
> øvre := plot(subs(r = 2, h = 5, f(x)), color = red) :
  nedre := plot(subs(r = 2, h = 5, g(x)), color = green) :
  display(øvre, nedre, view = [-10..10, -10..10])
```



Rumfang af torus

```
> π·int((f(x))^2,x=-r..r)
```

$$\pi\left(\int_{-r}^{r}\left(h+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx\right) \quad (3)$$

```
> π·int((g(x))^2,x=-r..r)
```

$$\pi\left(\int_{-r}^{r}\left(h-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx\right) \quad (4)$$

```
> π·int((f(x))^2,x=-r..r)-π·int((g(x))^2,x=-r..r)
```

$$\pi\left(\int_{-r}^{r}\left(h+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx\right)-\pi\left(\int_{-r}^{r}\left(h-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx\right) \quad (5)$$

Maple giver op!

I stedet for omskriver vi selv udtrykket, så der kun er et integral:

> $\pi \cdot \int_{-r}^{r} \left((f(x))^2 - g(x)^2 \right) dx$

$$2\,\pi^2\,h\,\mathrm{csgn}(r)\,r^2 \qquad \textbf{(6)}$$

Maple kan nu løse opgaven!

"csgn" er en fortegnsfunktion, som er 1 når r>0, og -1 når r<0.
Her er r>0, så:

> $assume(r > 0);\ interface(showassumed = 0)$:

> $\pi \cdot \int_{-r}^{r} \left((f(x))^2 - g(x)^2 \right) dx$

$$2\,\pi^2\,h\,r^2 \qquad \textbf{(7)}$$

Rumfanget af en **torus** er altså: $\mathbf{2 \cdot \pi^2 \cdot h \cdot r^2}$

Udtrykket er lig med $(2\,\pi \cdot h) \cdot (\pi \cdot r^2)$
$2\,\pi \cdot h$ angiver tyngdepunktets bane om x-aksen
$\pi \cdot r^2$ angiver arealet af cirkelskiven

Dette er netop **Guldins regel:**
https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_centroid_theorem