Grundlæggende vektorregning

side 90-111 i Grundbog A

Eksempel 71 side 90 (hvordan skrives en vektor i Maple)

```
> restart
```

Vektorer skrives som < , >

Pilen → over en vektor laves separat (findes i "Accents"-paletten).
Pilen har ingen betydning for Maples udregninger, men $\vec{a}$ og a er ikke det samme for Maple!

```
> OP := <8, -5>
```

$$\overrightarrow{OP} := \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

```
> OQ := <14, 7>
```

$$\overrightarrow{OQ} := \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

```
> PQ := OQ - OP
```

$$\overrightarrow{PQ} := \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

```
> OT := OP + 1/3 * PQ
```

$$\overrightarrow{OT} := \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Dvs. punktet $T = (10, -1)$

Vektorkommandoer i Gym-pakken

Med installationen af Maple 2017 følger automatisk **Gym**-pakken.

Vektorregning

arealP	arealT	pol2cart	det
dotP	ev	hat	len
cart2pol	proj	vinkel	vsolve

Eksempel 74 side 93-94 (afstande i trekant)

```
> restart
> with(Gym) :
```

> $\overrightarrow{OA} := \langle 12, 5\rangle; \overrightarrow{OB} := \langle -7, 10\rangle; \overrightarrow{OC} := \langle -6, -9\rangle; \overrightarrow{OD} := \langle 4, -8\rangle$

$$\overrightarrow{OA} := \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} := \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} := \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1)}$$

> $\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} := \begin{bmatrix} 1 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} := \begin{bmatrix} -8 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} := \begin{bmatrix} 11 \\ -18 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

> $AfstandAB := len\left(\overrightarrow{AB}\right)$

$$AfstandAB := \sqrt{386} \quad \textbf{(3.3)}$$

> $AfstandBC := len\left(\overrightarrow{BC}\right)$

$$AfstandBC := \sqrt{362} \quad \textbf{(3.4)}$$

> $AfstandAD := len\left(\overrightarrow{AD}\right)$

$$AfstandAD := \sqrt{233} \quad \textbf{(3.5)}$$

> $AfstandBD := len\left(\overrightarrow{BD}\right)$

$$AfstandBD := \sqrt{445} \quad \textbf{(3.6)}$$

Eksempel 77 side 99 (opløsning af vektor)

> *restart*

> $\vec{a} := \langle 2, 4\rangle; \vec{b} := \langle 6, 1\rangle; \vec{c} := \langle 15, 8\rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4.1)

$$\vec{c} := \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

> $s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 2s + 6t \\ 4s + t \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.2)}$$

> $solve(\{(s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b})[1] = \vec{c}[1], (s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b})[2] = \vec{c}[2]\}, \{s, t\})$

$$\left\{s = \frac{3}{2}, t = 2\right\} \quad \textbf{(4.3)}$$

eller

> $solve(\{2\cdot s + 6\cdot t = 15, 4\cdot s + t = 8\})$

$$\left\{s = \frac{3}{2}, t = 2\right\} \quad \textbf{(4.4)}$$

eller **(vektorlignings-solve)**

> $with(Gym)$:

> $vsolve(s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b} = \vec{c}, \{s, t\})$

$$\left\{s = \frac{3}{2}, t = 2\right\} \quad \textbf{(4.5)}$$

eller blot

> $vsolve(s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b} = \vec{c})$

$$\left\{s = \frac{3}{2}, t = 2\right\} \quad \textbf{(4.6)}$$

Konklusion: $\vec{c} = \frac{3}{2}\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{b}$

Eksempel 78 side 100 (skalarproduktet = prikprodukt af 2 vektorer)

> *restart*

> $\vec{a} := \langle 5, -7\rangle ; \vec{b} := \langle -4, -9\rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1)}$$

Skalarproduktet beregnes med *punktum* imellem vektorerne:

> $\vec{a}.\vec{b}$

$$43 \quad \textbf{(5.2)}$$

eller med · fra "Common Symbols"-paletten:

> $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$43 \quad \textbf{(5.3)}$$

eller med "dotP" (fra Gym-pakken)

```
> with(Gym) :
> dotP(a, b)
```

43 **(5.4)**

Konklusion: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$

Eksempel 79 side 102 (vinkel mellem 2 vektorer)

```
> restart
> with(Gym) :
> a := ⟨-3, 2⟩; b := ⟨5, 6⟩
```

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.1)}$$

```
> vinkel(a, b)
```

96.11550358 **(6.2)**

eller bruge formlen: $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$

```
> invCos( a . b / (len(a) · len(b)) )
```

96.11550358 **(6.3)**

Konklusion: Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ca. 96.12°

Eksempel 80 side 103 (vinkel mellem 2 vektorer)

```
> restart
> with(Gym) :
> OA := ⟨-7, 3⟩; OB := ⟨3, 2⟩; OC := ⟨-3, 8⟩
```

$$\overrightarrow{OA} := \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} := \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1)}$$

```
> AB := OB - OA; AC := OC - OA
```

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.2)}$$

> $A := vinkel(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$A := 57.05078488 \quad \textbf{(7.3)}$$

eller

> $invCos\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{len(\overrightarrow{AB}) \cdot len(\overrightarrow{AC})}\right)$

$$57.05078488 \quad \textbf{(7.4)}$$

Konklusion: Vinklen A er ca. $57.05°$

Eksempel 82 side 105 (en vektor vinkelret på anden vektor)

> *restart*

> *with(Gym)* :

> $\vec{a} := \langle 3, 8 \rangle ; \vec{b} := \langle 6, -3 \rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1)}$$

> $solve\left(\left(\vec{a} + t \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0, t\right)$

$$\frac{2}{15} \quad \textbf{(8.2)}$$

eller

> $solve\left(dotP\left(\vec{a} + t \cdot \vec{b}, \vec{b}\right) = 0, t\right)$

$$\frac{2}{15} \quad \textbf{(8.3)}$$

Konklusion: $\vec{a} + t \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$ når $t = \dfrac{2}{15}$

NB: Hvorfor er der så en "dotP" kommando i Gym-pakken til at beregne skalarproduktet?

"Punktum" eller $\cdot$ mellem 2 vektorer giver korrekt skalarproduktet, når begge vektorer er givet ved *konkrete tal*.
Hvis der indgår variable, så vil "punktum" eller $\cdot$ give det ***komplekst konjugerede*** (vises med streg over variablen, f.eks. $\overline{t}$)!

> $\left(\vec{a} + t \cdot \vec{b}\right).\vec{b}$

$$-6 + 45\,\overline{t} \quad \textbf{(8.4)}$$

> $(\vec{a}+t\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}$

$$-6+45\,t \tag{8.5}$$

> $dotP(\vec{a}+t\cdot\vec{b},\vec{b})$

$$45\,t-6 \tag{8.6}$$

Eksempel 83 side 107 (projektion af vektor på vektor)

> *restart*

> *with(Gym)* :

> $\vec{a}:=\langle 1,2\rangle;\ \vec{b}:=\langle -10,20\rangle$

$$\vec{a}:=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{b}:=\begin{bmatrix}-10\\20\end{bmatrix} \tag{9.1}$$

> $proj(\vec{a},\vec{b})$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix} \tag{9.2}$$

eller bruge formlen: **Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$:** $\vec{a}_b=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}$

NB: pas på forskellen på de 2 prikker i formlen! "Prik" hhv. "Gange".

> $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{(len(\vec{b}))^2}\cdot\vec{b}$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix} \tag{9.3}$$

Konklusion: Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er $\vec{a}_b=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix}$

> $proj(\vec{b},\vec{a})$

$$\begin{bmatrix}6\\12\end{bmatrix} \tag{9.4}$$

eller

> $\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{(len(\vec{a}))^2} \cdot \vec{a}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.5)}$$

Konklusion: Projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er $\vec{b}_a = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

Eksempel 84 side 108 (tværvektor)

> *restart*

> *with(Gym) :*

> $\vec{a} := \langle 3, 4 \rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.1)}$$

Tværvektoren beregnes med kommandoen "hat":

> $hat(\vec{a})$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.2)}$$

Konklusion: Tværvektoren til $\vec{a}$ er $\hat{\vec{a}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\hat{\vec{a}}$ kan anvendes i forklaringer, men ikke til udregning. Ved udregninger skal man anvende $hat(\vec{a})$.

NB: Tværvektoren har samme længde som den givne vektor, og står vinkelret på denne:

> $len(\vec{a}) = len(hat(\vec{a}))$

$$5 = 5 \quad \textbf{(10.3)}$$

> $\vec{a} \cdot hat(\vec{a})$

$$0 \quad \textbf{(10.4)}$$

Eksempel 85 side 109 (determinant og areal af parallelogram udspændt af 2 vektorer)

> *restart*

> *with(Gym) :*

> $\vec{a} := \langle 3, 4 \rangle ; \vec{b} := \langle -5, 2 \rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(11.1)

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1)}$$

> $det(\vec{a}, \vec{b})$

$$26 \quad \textbf{(11.2)}$$

> $det(\vec{b}, \vec{a})$

$$-26 \quad \textbf{(11.3)}$$

> $|det(\vec{a}, \vec{b})|$

$$26 \quad \textbf{(11.4)}$$

> $|det(\vec{b}, \vec{a})|$

$$26 \quad \textbf{(11.5)}$$

Determinanten er givet ved:

> $hat(\vec{a}) \cdot \vec{b}$

$$26 \quad \textbf{(11.6)}$$

> $hat(\vec{b}) \cdot \vec{a}$

$$-26 \quad \textbf{(11.7)}$$

> $|hat(\vec{a}) \cdot \vec{b}|$

$$26 \quad \textbf{(11.8)}$$

> $|hat(\vec{b}) \cdot \vec{a}|$

$$26 \quad \textbf{(11.9)}$$

Arealet af det udspændte parallelogram er givet ved:

> $arealP(\vec{a}, \vec{b})$

$$26 \quad \textbf{(11.10)}$$

> $arealP(\vec{b}, \vec{a})$

$$26 \quad \textbf{(11.11)}$$

Konklusion: Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\underline{26}$.

Den numerisk værdi af dette tal er **arealet af det parallelogram**, som vektorerne udspænder.

Eksempel 86 side 111 (areal af trekant udspændt af 2 vektorer)

> *restart*

> *with(Gym)* :

> $\overrightarrow{OA} := \langle 3, 5 \rangle; \overrightarrow{OB} := \langle -4, 7 \rangle; \overrightarrow{OC} := \langle 5, 10 \rangle$

$$\overrightarrow{OA} := \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} := \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1)}$$

> $\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.2)}$$

Trekantens areal er halvdelen af arealet af det parallelogram, som de 2 vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ udspænder.
NB: Determinanten kan blive negativ, derfor anvendes numerisk værdi.

> $arealT\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\frac{39}{2} \quad \textbf{(12.3)}$$

> $\frac{1}{2} \cdot arealP\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\frac{39}{2} \quad \textbf{(12.4)}$$

> $\frac{1}{2} \cdot \left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$

$$\frac{39}{2} \quad \textbf{(12.5)}$$

Konklusion: Trekantens areal er $\frac{39}{2} = 19.5$