Vektorregning og geometri i rummet (3D)

Bog A, kapitel 5, side 132-181

Def: vektor har både retning og længde.
En vektor kan parallelforskydes, dvs. afsættes fra et vilkårligt punkt.

Notation: pil henover symbolet, f.eks. $\vec{a}$

Koordinater: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Regneoperationer: sum $\vec{a} + \vec{b}$, faktor $k\vec{a}$, modsatte vektor $-\vec{a}$, differens $\vec{b} - \vec{a}$
Regner koordinatvis.
Geometrisk: sum svarer til kræfternes parallelogram.

Regneregler: kommutative lov, associative lov, distributive love gælder(side 141).

Stedvektor: $\overrightarrow{OP}$ har samme koordinater som punktet *P*.

Vektor mellem 2 punkter: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$

Indskudsreglen: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (man kan indskyde et vilkårligt punkt *B*,jvf. sum af 2 vektorer).

Afstand mellem 2 punkter: $dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
(kommer direkte fra Pythagoras' sætning, som anvendes 2 gange på 2 forskellige trekanter).

Skalarproduktet (prikproduktet): $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Regneregler for skalarprodukt: side 150 sætning 40

Vinkel mellem 2 vektorer: $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Ortogonale vektorer: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$: $\overrightarrow{a_{\vec{b}}} = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$

Krydsprodukt (vektorprodukt): $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}$

hvor $D_x = det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ og $D_y = det \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ og $D_z = det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

NB: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ og $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$

Parallelle vektorer: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Areal af parallelogram: $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Ret linje (parameterfremstilling): $\vec{r}$ retningsvektor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Plan (ligning): $\vec{n}$ normalvektor

$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

Vinkel mellem 2 linjer = vinkel mellem linjernes retningsvektorer.

Vinkel mellem 2 planer = vinkel mellem planernes normalvektorer.

Vinkel mellem linje og plan = 90^o- vinkel mellem linjens retningsvektor og planens normalvektor.

Skæring mellem 2 linjer:
Sæt de 2 parameterfremstillinger lig hinanden, og regn løs.

Skæring mellem linje og plan:
Indsæt linjens parameterfremstilling i planens ligning, og regn løs.

Projektion af punkt på plan:
Lav linje gennem punkt med planens normalvektor som retningsvektor. Find skæringspunkt mellem linje og plan.

Projektion af punkt på linje:

Lav plan gennem punkt med linjens retningsvektor som normalvektor. Find skæringspunkt mellem linje og plan.

Projektion af linje på plan:
Vælg 2 punkter på linjen. Projicer hvert af disse punkter ned på planen. Brug vektoren mellem de punkter som retningsvektor for den projicerede linje.

Afstand fra punkt til plan: $dist(Q, \alpha) = \dfrac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
hvor punktet $Q = (x_0, y_0, z_0)$ og planen α med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

Afstand mellem 2 parallelle planer:
Find et punkt på den ene plan. Beregn afstanden fra dette pun kt til den anden plan (brug formlen ovenfor).

Kuglens ligning: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
hvor centrum $C = (x_0, y_0, z_0)$ og radius = r.

En tangentlinje eller **tangentplan** til kuglen står vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunktet.

Skæring mellem linje og cirkel:
Indsæt linjens parameterfremstilling i cirklens ligning, og regn løs.