Snoet reb (5)

$restart$
$with(plots):$
$with(VektorAnalyse4):$

$assume(R > 0, h > 0, a > 0, b > 0) : interface(showassumed = 0) :$

Udledning af parametriseringen af helix udvidet med en elliptisk tykkelse

Inspiration til parametrisering af helix med en cirkulær tykkelse:
https://math.stackexchange.com/questions/461547/whats-the-equation-of-helix-surface

Parametrisering af helix (snoet spiral) om z-aksen:
$r_{helix}(u) := \langle R\cdot\cos(u + u_{start}), R\cdot\sin(u + u_{start}), h\cdot u\rangle :$

$$r_{helix}(u) = \begin{bmatrix} R\cos(u + u_{start}) \\ R\sin(u + u_{start}) \\ h\,u \end{bmatrix}$$

Tangent til helixpunkt (hastighedsvektor):
$H := unapply(diff(r_{helix}(u), u), u) :$

$$H(u) = \begin{bmatrix} -R\sin(u + u_{start}) \\ R\cos(u + u_{start}) \\ h \end{bmatrix}$$

Normeret (enhedvektor i samme retning):
$H_{enhed}(u) := simplify\left(\frac{H(u)}{\sqrt{prik(H(u), H(u))}}\right) :$

$$H_{enhed}(u) = \begin{bmatrix} -\frac{R\sin(u + u_{start})}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\ \frac{R\cos(u + u_{start})}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\ \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \end{bmatrix}$$

Accelerationsvektor til helixpunkt:
$A := unapply(diff(H(u), u), u) :$

$A(u) =$

$$\begin{bmatrix} -R\cos(u+u_{start}) \\ -R\sin(u+u_{start}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normeret (enhedvektor i samme retning):

$$A_{enhed}(u) := simplify\left(\frac{A(u)}{\sqrt{prik(A(u), A(u))}}\right):$$

$$A_{enhed}(u) = \begin{bmatrix} -\cos(u+u_{start}) \\ -\sin(u+u_{start}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normalvektor til hastighedsvektor og accelerationsvektor:

$$N(u) := kryds(H(u), A(u)):$$

$$N(u) = \begin{bmatrix} h\,R\sin(u+u_{start}) \\ -h\,R\cos(u+u_{start}) \\ R^2\cos(u+u_{start})^2 + R^2\sin(u+u_{start})^2 \end{bmatrix}$$

Normeret (enhedvektor i samme retning):

$$N_{enhed}(u) := simplify\left(\frac{N(u)}{\sqrt{prik(N(u), N(u))}}\right):$$

$$N_{enhed}(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{h\sin(u+u_{start})}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ -\dfrac{h\cos(u+u_{start})}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{bmatrix}$$

Elliptisk udvidelse af helix-snoningen, hvor der dannes en ellipse ortogonalt på helixen:

De 2 enhedsvektorer $N_{enhed}(u)$ og $H_{enhed}(u)$ danner de 2 ortogonale retninger, som er ortogonale til helixen:

$$r_{snoet} := unapply\left(r_{helix}(u) + \left(A_{enhed}(u)\cdot a\cdot\cos(v) + N_{enhed}(u)\cdot b\cdot\sin(v)\right), [u, v]\right):$$

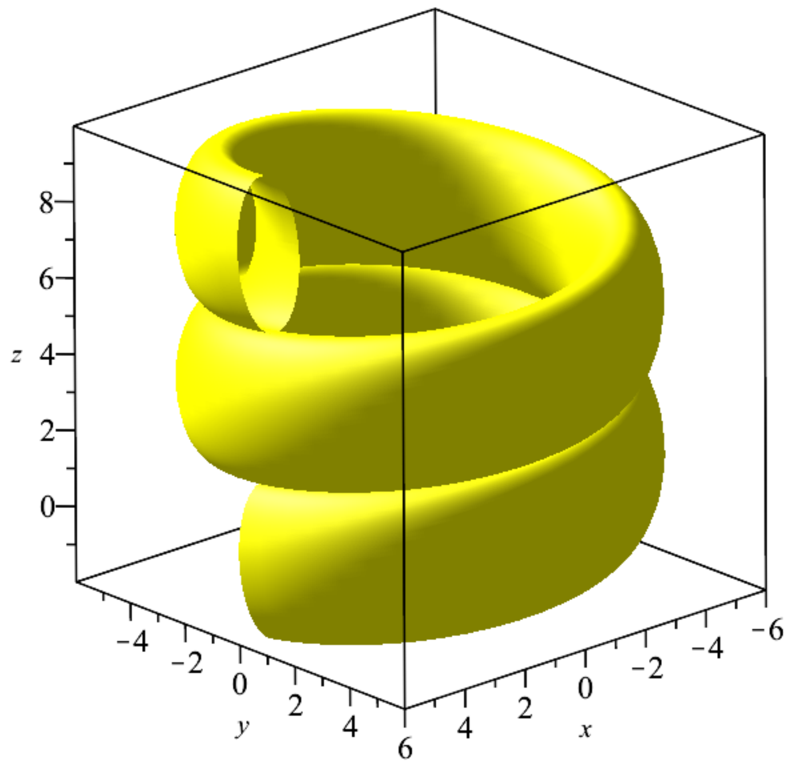
$$r_{snoet}(u, v) = \begin{bmatrix} R\cos(u+u_{start}) - a\cos(v)\cos(u+u_{start}) + \dfrac{b\sin(v)\,h\sin(u+u_{start})}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ R\sin(u+u_{start}) - a\cos(v)\sin(u+u_{start}) - \dfrac{b\sin(v)\,h\cos(u+u_{start})}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ h\,u + \dfrac{b\sin(v)\,R}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{bmatrix}$$

hvor $u \in [0; 2\cdot\pi\cdot n]$, $v \in [0; 2\cdot\pi]$ og n angiver antal omgange i helixen.
R angiver radius i helix-snoningen, og a og b angiver halvakser i den elliptiske udvidelse.

1 snoning tætpakket

$P_1 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=\frac{2}{\pi}, u_{start}=0, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

$display(P_1)$



Udledning af formel for stigning pr. omgang, når de 2 snoninger skal være tætpakket

Figur med indtegnet punkt på grønne helix og en bundlinje på den gule helix:

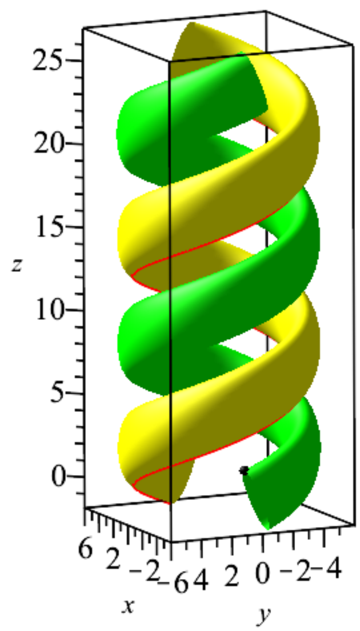
$S := 2:$

$P_1 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=2, u_{start}=0, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

$P_2 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=2, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=green, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

$PUNKT_{grøn} := pointplot3d\left(\left[\left[vop\left(simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=2, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\right]\right], symbol=solidsphere, symbolsize=10, color=black\right):$

$KURVE_{gul} := spacecurve\left(\left[vop\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=2, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right)\right)\right], u=0..2\cdot\pi\cdot 2,\right.$
$\left.thickness=3, color=red\right):$
$display(P_1, P_2, PUNKT_{grøn}, KURVE_{gul})$



Det sorte punkt på den grønne udvidede helix skal flyttes op til den røde kurve på den udvidede gule helix.
NB: minimum er IKKE ved π, fordi cirklerne ikke er lodrette!

$Difference := unapply\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right) - simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right), [u, h]\right):$

$$Difference(u, h) = \begin{bmatrix} 5\cos(u) - \frac{2\,h\sin(u)}{\sqrt{h^2+25}} + 5 \\ 5\sin(u) + \frac{2\,h\cos(u)}{\sqrt{h^2+25}} - \frac{2\,h}{\sqrt{h^2+25}} \\ h\,u - \frac{20}{\sqrt{h^2+25}} \end{bmatrix}$$

$L := fsolve(\{Difference(u, h)[1]=0, Difference(u, h)[3]=0\}, \{h=0..3, u=0..2\cdot\pi\}) =$
$\{h=1.316330740, u=2.938619417\}$

NB: kan ikke løses eksakt, derfor anvendes den numeriske løser på 2 af ligningerne (ikke 3 - for så findes der ikke en løsning).

$U := rhs(L[2]) : H := rhs(L[1]) :$

$$evalf(Difference(U, H)) = \begin{bmatrix} 0. \\ -2.0 \times 10^{-9} \\ 2. \times 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Dvs. med den givne H-værdi vil det sorte punkt ligge på den gule helix.

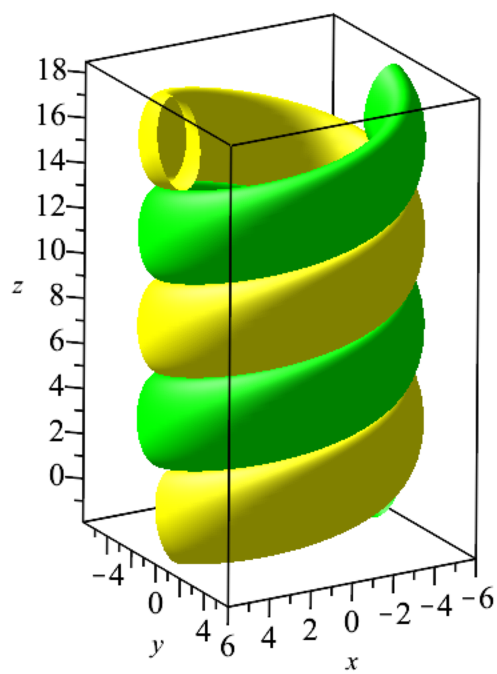
2 snoninger tætpakket

$S := 2 :$

$P_1 := plot3d\left(subs\left(R = 5, a = 1, b = 2, h = H, u_{start} = 0, r_{snoet}(u, v)\right), u = 0..2 \cdot \pi \cdot 2, v = 0..2 \cdot \pi, labels = [x, y, z], scaling = constrained, color = yellow, style = patchnogrid, numpoints = 10000\right) :$

$P_2 := plot3d\left(subs\left(R = 5, a = 1, b = 2, h = H, u_{start} = 1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u = 0..2 \cdot \pi \cdot 2, v = 0..2 \cdot \pi, labels = [x, y, z], scaling = constrained, color = green, style = patchnogrid, numpoints = 10000\right) :$

$display(P_1, P_2)$



Udledning af formel for stigning pr. omgang, når de 3 snoninger skal være tætpakket

Figur med indtegnet punkt på grønne helix og en bundlinje på den gule helix:

$S := 3:$

$P_1 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=3, u_{start}=0, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

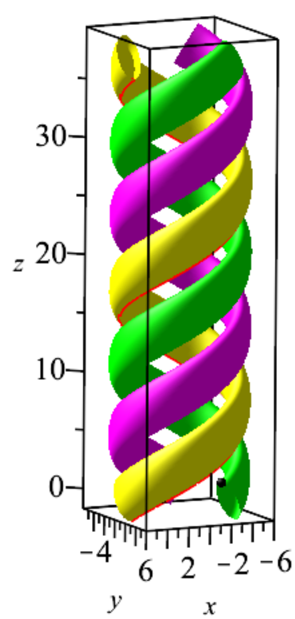
$P_2 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=3, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=green, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

$P_3 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=3, u_{start}=2\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=magenta, style=patchnogrid, numpoints=10000\right):$

$PUNKT_{grøn} := pointplot3d\left(\left[\left[vop\left(simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=3, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\right]\right], symbol=solidsphere, symbolsize=10, color=black\right):$

$KURVE_{gul} := spacecurve\left(\left[vop\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=3, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right)\right)\right], u=0..2\cdot\pi\cdot 2, thickness=3, color=red\right):$

$display\left(P_1, P_2, P_3, PUNKT_{grøn}, KURVE_{gul}\right)$



Det sorte punkt på den grønne udvidede helix skal flyttes op til den røde kurve på den udvidede gule helix.

NB: minimum er IKKE ved π, fordi cirklerne ikke er lodrette!

$$Difference := unapply\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right) - simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right), [u, h]\right):$$

$$Difference(u, h) = \begin{bmatrix} 5\cos(u) - \frac{2\,h\sin(u)}{\sqrt{h^2+25}} + \frac{5}{2} - \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{h^2+25}} \\ 5\sin(u) + \frac{2\,h\cos(u)}{\sqrt{h^2+25}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\sqrt{h^2+25}} \\ h\,u - \frac{20}{\sqrt{h^2+25}} \end{bmatrix}$$

$$L := fsolve(\{Difference(u,h)[1]=0, Difference(u,h)[3]=0\}, \{h=0..3, u=0..2\cdot\pi\}) = \{h=2.063861818, u=1.791495571\}$$

NB: kan ikke løses eksakt, derfor anvendes den numeriske løser på 2 af ligningerne (ikke 3 - for så findes der ikke en løsning).

$$U := rhs(L[2]) : H := rhs(L[1]) :$$

$$evalf(Difference(U, H)) = \begin{bmatrix} -2.\times 10^{-10} \\ -1.\times 10^{-9} \\ 0. \end{bmatrix}$$

Dvs. med den givne H-værdi vil det sorte punkt ligge på den gule helix.

3 snoninger tætpakket

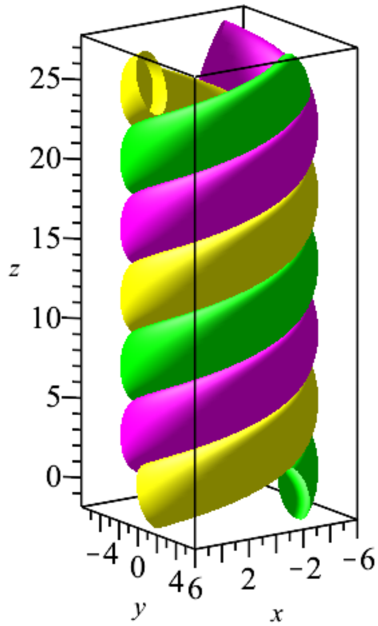
$$S := 3 :$$

$$P_1 := plot3d(subs(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=0, r_{snoet}(u, v)), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000) :$$

$$P_2 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=green, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$$

$$P_3 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=2\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=magenta, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$$

$$display(P_1, P_2, P_3)$$



Udledning af formel for stigning pr. omgang, når de 4 snoninger skal være tætpakket

Figur med indtegnet punkt på grønne helix og en bundlinje på den gule helix:

$S := 4 :$

$P_1 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=0, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$P_2 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=green, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

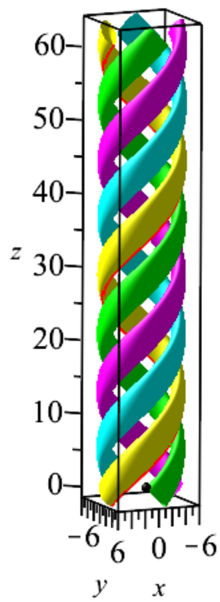
$P_3 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=2\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=magenta, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$P_4 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=3\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u, v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x, y, z], scaling=constrained, color=cyan, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$$PUNKT_{grøn} := pointplot3d\left(\left[\left[vop\left(simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\right]\right], symbol=solidsphere, symbolsize=10, color=black\right):$$

$$KURVE_{gul} := spacecurve\left(\left[vop\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=5, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right)\right)\right], u=0..2\cdot\pi\cdot 2, thickness=3, color=red\right):$$

$$display\left(P_1, P_2, P_3, P_4, PUNKT_{grøn}, KURVE_{gul}\right)$$



Det sorte punkt på den grønne udvidede helix skal flyttes op til den røde kurve på den udvidede gule helix.
NB: minimum er IKKE ved π, fordi cirklerne ikke er lodrette!

$$Difference := unapply\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=0, r_{snoet}\left(u, \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right) - simplify\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right), [u, h]\right):$$

$$Difference(u, h) =$$

$$\begin{bmatrix} 5\cos(u) - \frac{2\,h\sin(u)}{\sqrt{h^2+25}} - \frac{2\,h}{\sqrt{h^2+25}} \\ 5\sin(u) + \frac{2\,h\cos(u)}{\sqrt{h^2+25}} - 5 \\ h\,u - \frac{20}{\sqrt{h^2+25}} \end{bmatrix}$$

$L := fsolve(\{Difference(u,h)[1]=0, Difference(u,h)[3]=0\}, \{h=0..5, u=0..2\cdot\pi\}) =$
$\{h = 2.945212614, u = 1.170211069\}$

NB: kan ikke løses eksakt, derfor anvendes den numeriske løser på 2 af ligningerne (ikke 3 - for så findes der ikke en løsning).

$U := rhs(L[2]) : H := rhs(L[1]) :$

$$evalf(Difference(U,H)) = \begin{bmatrix} -2.\times 10^{-9} \\ 0. \\ 1.\times 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Dvs. med den givne H-værdi vil det sorte punkt ligge på den gule helix.

4 snoninger tætpakket

$S := 4 :$

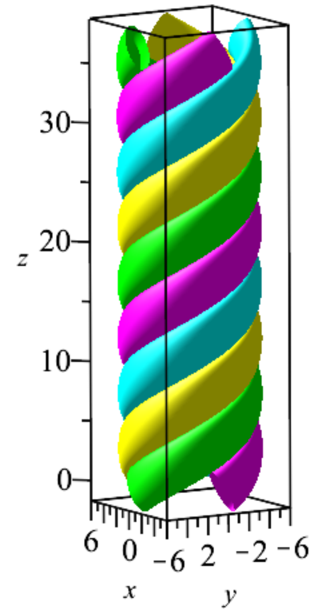
$P_1 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=0, r_{snoet}(u,v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x,y,z], scaling=constrained, color=yellow, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$P_2 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=1\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u,v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x,y,z], scaling=constrained, color=green, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$P_3 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=2\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u,v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x,y,z], scaling=constrained, color=magenta, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$P_4 := plot3d\left(subs\left(R=5, a=1, b=2, h=H, u_{start}=3\cdot\frac{2\cdot\pi}{S}, r_{snoet}(u,v)\right), u=0..2\cdot\pi\cdot 2, v=0..2\cdot\pi, labels=[x,y,z], scaling=constrained, color=cyan, style=patchnogrid, numpoints=10000\right) :$

$display(P_1, P_2, P_3, P_4)$


30
20
10
0
z
6
0
−6
2
−2
−6
x
y