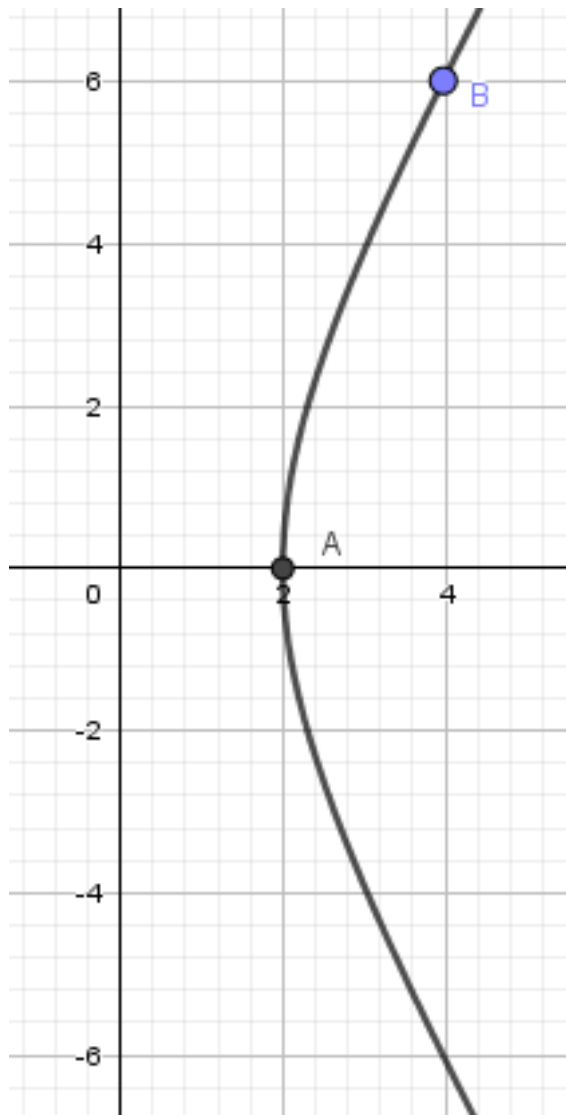


Beregninger på hyperbel (2D) og hyperboloide (3D)

OPG 10: Beregning af a og b for en hyperbel

Hyperblen består af 2 grene i planen (2D).

Hyperblen er givet ved ligningen: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Givet 2 punkter på hyperblen: (2,0) og (4,6).
Beregn a og b ?

Svar

Man opstiller 2 ligninger med 2 ubekendte.
Fremkommer ved at indsætte de 2 punkter i hyperblens ligning.

Punktet (2,0) giver ligningen:

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

Punktet (4,6) giver ligningen:

$$\frac{4^2}{a^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4^2}{2^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{4} - \frac{36}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{36}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{b^2} = 3 \Leftrightarrow 36 = 3 \cdot b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{36}{3} \Leftrightarrow b^2 = 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \sqrt{12} = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 3.46}}$$

$$\text{evalf}(\sqrt{12}) = 3.464101616$$

OPG 11: Beregning af a og c for en hyperboloide

En cirkulær hyperboloide har en ligning af formen: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Givet 2 punkter på hyperboloiden: (2,0,0) og (4,0,6).
Beregn a og c ?

Svar

Man opstiller 2 ligninger med 2 ubekendte.
Fremkommer ved at indsætte de 2 punkter i hyperboloidens ligning.

Punktet (2,0,0) giver ligningen:

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{a^2} - \frac{0^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 4 = a^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

Punktet (4,0,6) giver ligningen:

$$\frac{4^2}{a^2} + \frac{0^2}{a^2} - \frac{6^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4^2}{2^2} + \frac{0^2}{2^2} - \frac{6^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{4} + 0 - \frac{36}{c^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{36}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{c^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{36}{3} \Leftrightarrow c^2 = 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = \sqrt{12} = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 3.46}}$$

$$\text{evalf}(\sqrt{12}) = 3.464101616$$

Altså samme løsning som i opgave 1 (b er udskiftet med c).

OPG 12: Beregning af a og c for en hyperboloide

En cirkulær hyperboloide har en ligning af formen: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hyperboloiden skal have en diameter på 10 ved xy-planen, og i højden 20 skal diameteren være 20.
Beregn a og c ?

Svar

Ud fra oplysningerne kan man se, at hyperboloiden må gå gennem disse 2 punkter: (5,0,0) og (10,0,20).

Man opstiller 2 ligninger med 2 ubekendte.
Fremkommer ved at indsætte de 2 punkter i hyperboloidens ligning.

Punktet (5,0,0) giver ligningen:

$$\frac{5^2}{a^2} + \frac{0^2}{a^2} - \frac{0^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 25 = a^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=5}}$$

Punktet (10,0,20) giver ligningen:

$$\frac{10^2}{a^2} + \frac{0^2}{a^2} - \frac{20^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{10^2}{5^2} + \frac{0^2}{5^2} - \frac{20^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{100}{25} + 0 - \frac{400}{c^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{400}{c^2} = 1$$

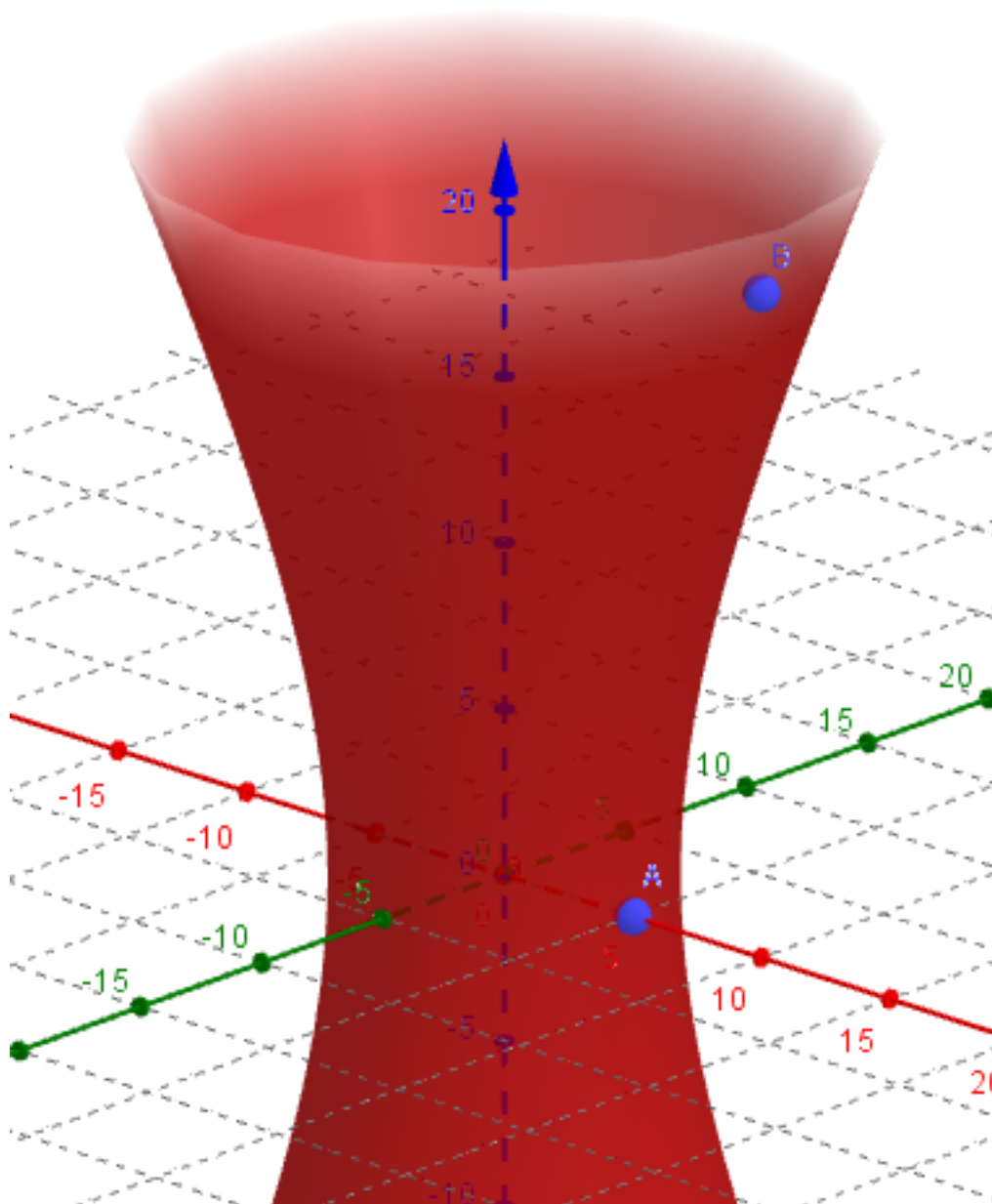
$$\Leftrightarrow \frac{400}{c^2} = 3 \Leftrightarrow c^2 = \frac{400}{3} \Leftrightarrow c^2 = 133.3333333 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.55$$

$$\text{evalf}\left(\frac{400}{3}\right) = 133.3333333$$

$$\text{evalf}\left(\sqrt{\frac{400}{3}}\right) = 11.54700539$$

Indtegner i GeoGebra, og ser, at de 2 punkter ligger på hyperboloiden med de beregnede værdier af a og c .

NB: $c^2 = \frac{400}{3}$. Punkterne er $A = (5, 0, 0)$ og $B = (10, 0, 20)$.



Det ser ud til at passe, at de 2 punkter ligger på hyperboloiden med ligningen: $x^2/5^2 + y^2/5^2 - z^2/(400/3) = 1$.

NB: Der skal zoomes for at se punktet B!