Opgaver med tegning af hyperbler (2D) og hyperboloide (3D)

GeoGebra kan hentes på: https://www.geogebra.org/download

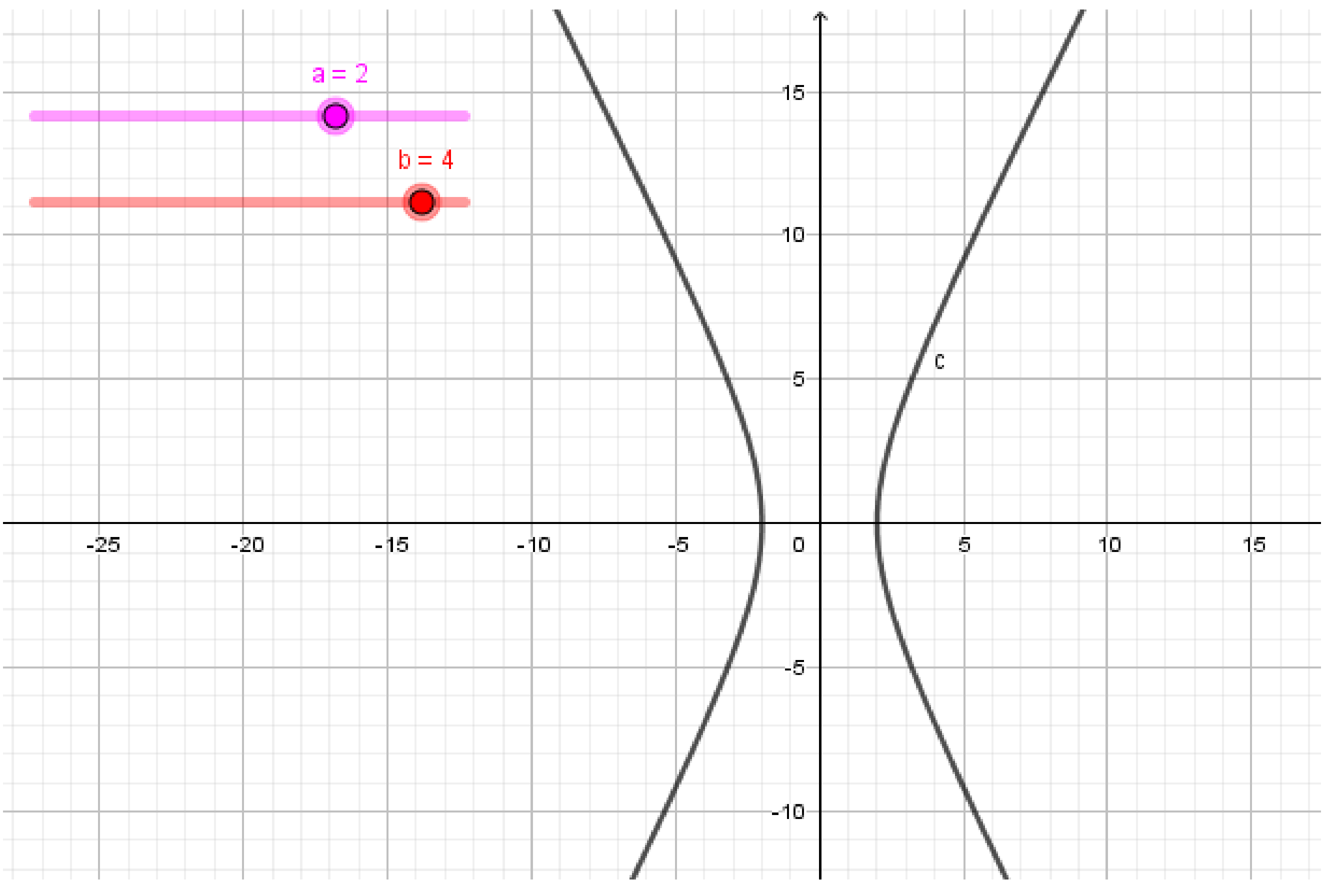
NB: Vælg *"GeoGebra Classic 5"*.

OPG 1: tegne hyperbel (ligning) i GeoGebra

Hyperblen består af 2 grene i planen (2D).

Hyperblen er givet ved ligningen: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Start GeoGebra.
I indtastningsfeltet forneden skrives: **x^2/a^2-y^2/b^2=1**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette 2 *skydere* til a og b. Sig ja!
Skærmbilledet kan så se sådan ud, idet skyderne har fået skiftet farve:



Prøv at ændre på de parametre a og b via skyderne.
NB: kun positive værdier af paramtrene er relevante.
Hvordan hyperblerne skifter udseende?

OPG 2: tegne hyperbel (parameterfremstilling) i GeoGebra

Hyperblens højre gren kan angives ved en parameterfremstilling:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cosh(t) \\ y &= b \cdot \sinh(t) \end{aligned}\right\} \text{ hvor } t \in \mathbb{R}$$

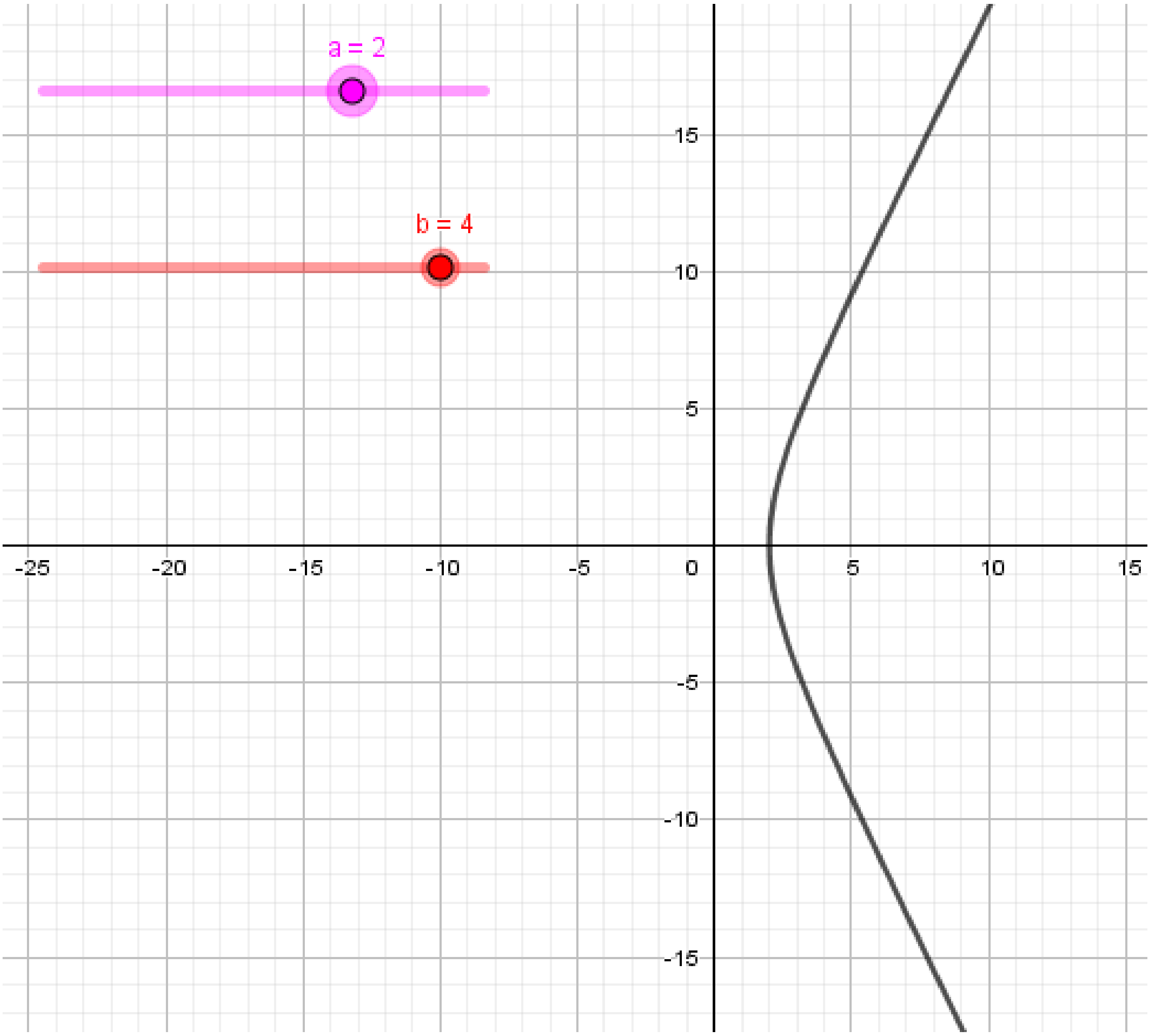
t kaldes parameteren.

Funktionen *cosh(t)* hedder "cosinus hyperbolsk", og er identisk med $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Funktionen *sinh(t)* hedder "sinus hyperbolsk", og er identisk med $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Disse 2 funktioner er kendte i GeoGebra.

Start GeoGebra.
I indtastningsfeltet forneden skrives: **Kurve(a*cosh(t),b*sinh(t),t,-10,10)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette 2 *skydere* til a og b. Sig ja!
Imidlertid opretter GeoGebra 3 skydere, nemlig til a, b og t. Slet den til t!
Skærmbilledet kan så se sådan ud, idet skyderne har fået skiftet farve:



NB: parameterfremstillingen dækker kun højre gren af hyperblen fra opgave 1.

OPG 3: tegne hyperboloide i GeoGebra

Kilde WikiPedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid ("one-sheet")

En hyperboloide i 3D har en ligning af typen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

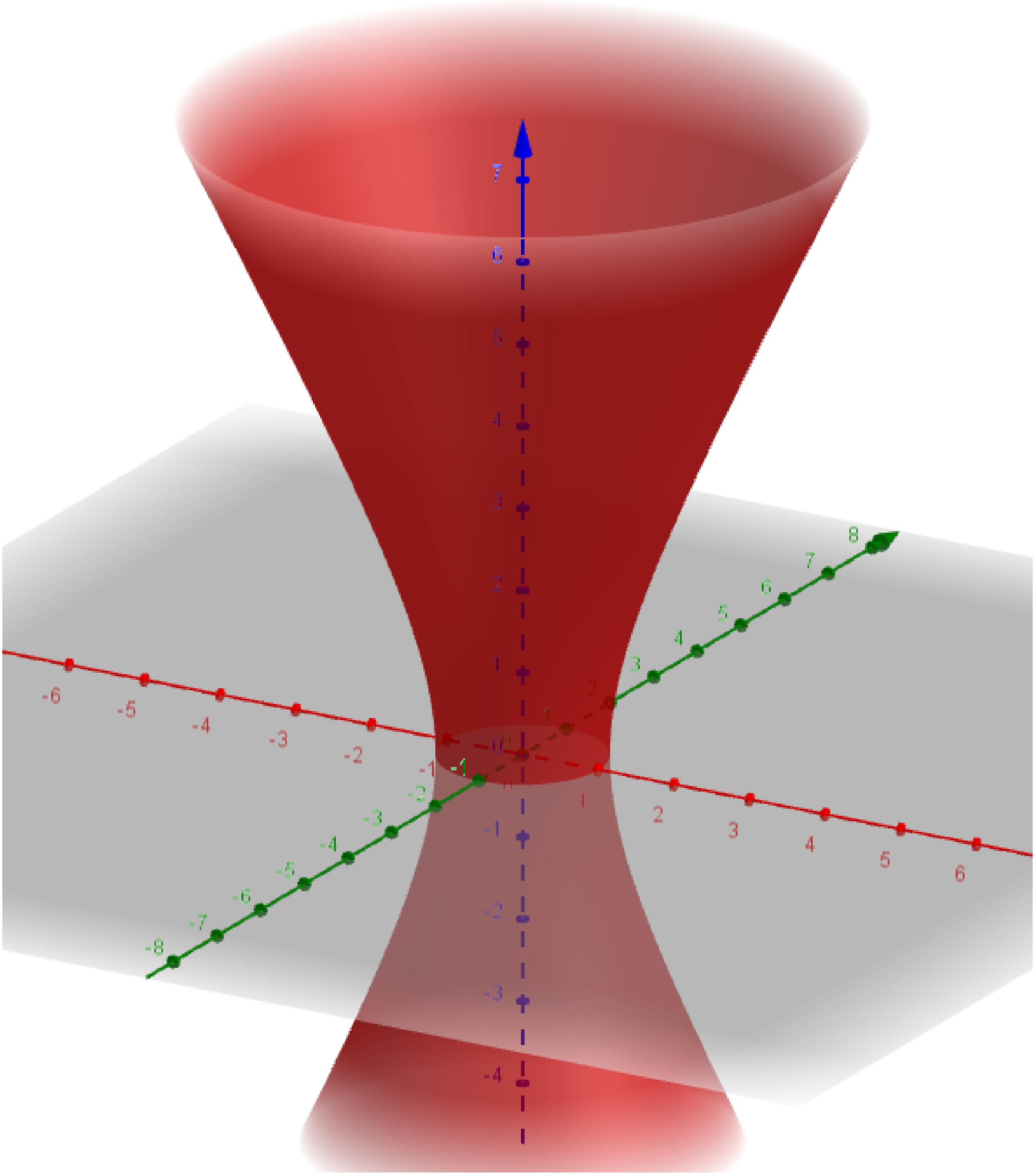
Generelt er hyperboloidens vandrette snitflade en ellipse.
Hvis hyperboloiden skal have en cirkel som vandret snitflade, skal $a=b$.
Dvs. ligningen bliver så: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Start GeoGebra.
Vælg "Vis", og derefter "3D Grafik".
NB: "Tegneblokken" bruges til skyderne!

I indtastningsfeltet forneden skrives: **x^2/a^2+y^2/a^2-z^2/c^2=1**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette 2 *skydere* til a og c. Sig ja!

NB: Det hele er meget tungt nu. PC'en arbejder hårdt! Så hav tålmodighed, når du ændrer på skyderen.

Skærmbilledet kan så se sådan ud (med $a=1$ og $c=2$):



OPG 4: tegne linjer på hyperboloiden i GeoGebra

Hyperboloiden har den fantastiske egenskab, at man kan tegne rette linjer, som 100% ligger i hyperboloidens overflade!

Kilde: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Properties_of_a_hyperboloid_of_one_sheet

Her regnes i **radiantal**.

NB: Ønsker man gradtal, skal v i $\cos(v)$ og $\sin(v)$ i formlerne erstattes af $\frac{v \cdot \pi}{180}$.

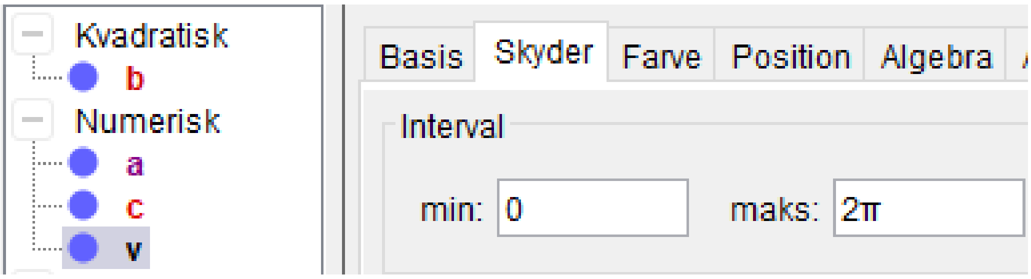
Hvis linjerne drejer højre om, så er de givet ved parameterfremstillingen:
$(a \cdot \cos(v), a \cdot \sin(v), 0) + t \cdot (-a \cdot \sin(v), a \cdot \cos(v), c)$

Hvis linjerne drejer venstre om, så er de givet ved parameterfremstillingen:
$(a\cdot\cos(v), a\cdot\sin(v), 0) + t\cdot(-a\cdot\sin(v), a\cdot\cos(v), -c)$

Hvor parameteren $t \in \mathbb{R}$ og vinklen $v \in [0; 2\cdot\pi]$ (i radiantal).

Hent eller konstruer hyperboloiden fra opgave 3.

I indtastningsfeltet forneden skrives nu: **Kurve(a*cos(v)-t*a*sin(v),a*sin(v)+t*a*cos(v),t*c,t,-10, 10)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette en *skyder* til v. Sig ja!
Imidlertid opretter GeoGebra 2 skydere, nemlig til v og t. Slet den til t!
Skyderen til v ændres til at gå fra 0 til $2\cdot\pi$ (indtastes som 2*pi):



NB: Anvender man gradtal, skal skyderen til v gå fra 0 til 360.

Brug så v-skyderen til at flytte den rette linje rundt om hyperboloiden!

Ønsker man, at linjerne kører den anden vej rundt, så kan man ændre udtrykket til:
Kurve(a*cos(v)-t*a*sin(v),a*sin(v)+t*a*cos(v),-t*c,t,-10,10). Altså indsætte et MINUSTEGN foran 3. koordinaten, så den hedder $-t\cdot c$.

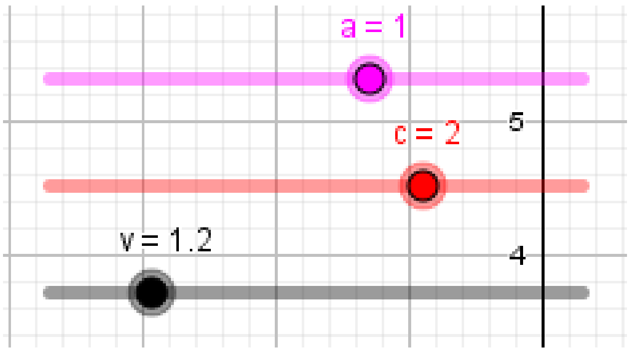
Hvis man har begge typer linjer, kan det se således ud:

Parametrisk kurve

$$d: \left.\begin{array}{l} x = 1\ \cos(1.2) - t\cdot 1\ \sin(1.2) \\ y = 1\ \sin(1.2) + t\cdot 1\ \cos(1.2) \\ z = t\cdot 2 \end{array}\right\} -10 \le t \le 10$$

$$e: \left.\begin{array}{l} x = 1\ \cos(1.2) - t\cdot 1\ \sin(1.2) \\ y = 1\ \sin(1.2) + t\cdot 1\ \cos(1.2) \\ z = -t\cdot 2 \end{array}\right\} -10 \le t \le 10$$

med disse skyderværdier:



ser man krydsede rette linjer på hyperboloiden: