Opgaver med tegning og beregning af spiral (3D)

GeoGebra kan hentes på: https://www.geogebra.org/download

NB: Vælg *"GeoGebra Classic 5"*.

Man kan læse om spiralen (engelsk: **helix**) på: https://en.wikipedia.org/wiki/Helix

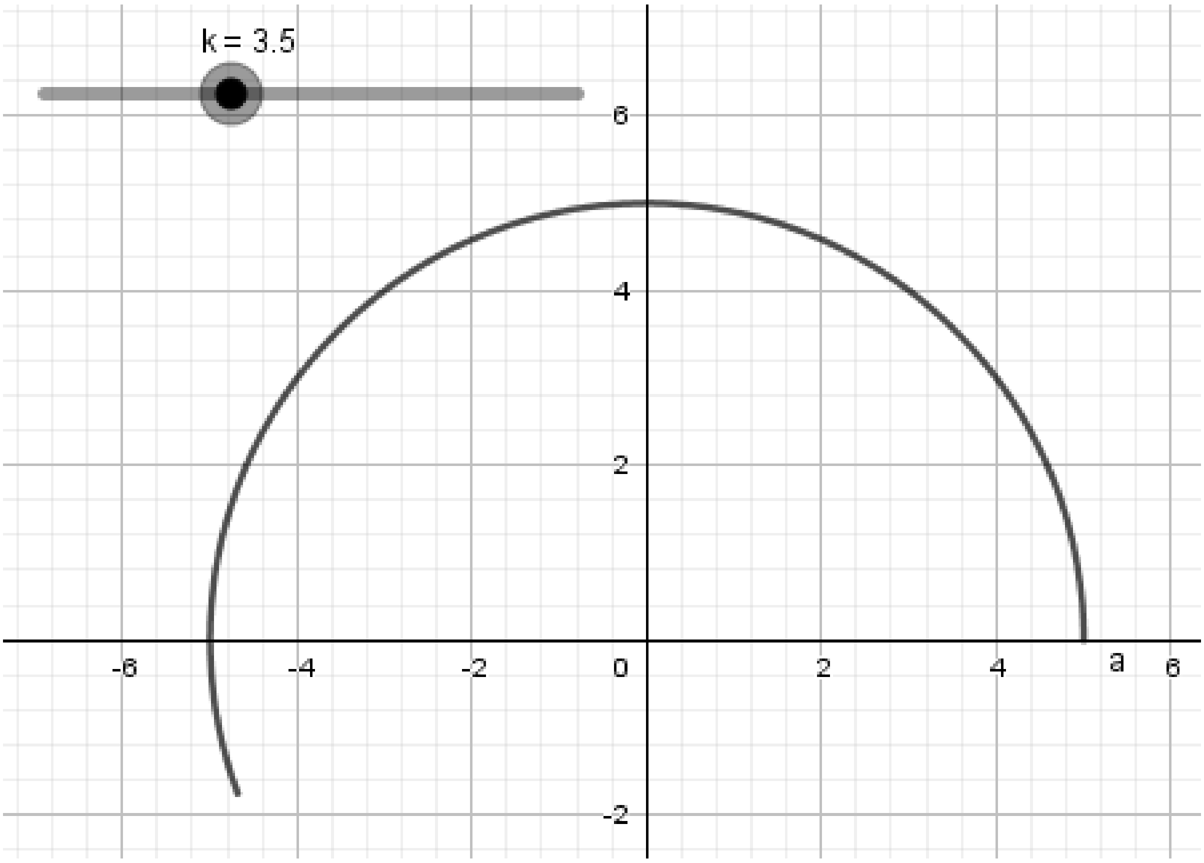
En **spiral** kaldes også en **skruelinje** på dansk.

Herunder arbejdes i radiantal.

OPG 5: tegne cirkel i GeoGebra (2D)

Start GeoGebra.
I indtastningsfeltet forneden skrives: **Kurve(5*cos(t), 5*sin(t), t, 0, k)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette *skyder* til k. Sig ja!
Imidlertid opretter GeoGebra 2 skydere, nemlig til k og t. Slet den til t!
Ændrer skyderen til k, så den går fra 0 til 10.

Skærmbilledet kan så se sådan ud:



Når man øger værdien af k, så indtegnes mere og mere af cirklen.
Når k overstiger $2\cdot\pi$, så er man kommet en hel omgang rundt.

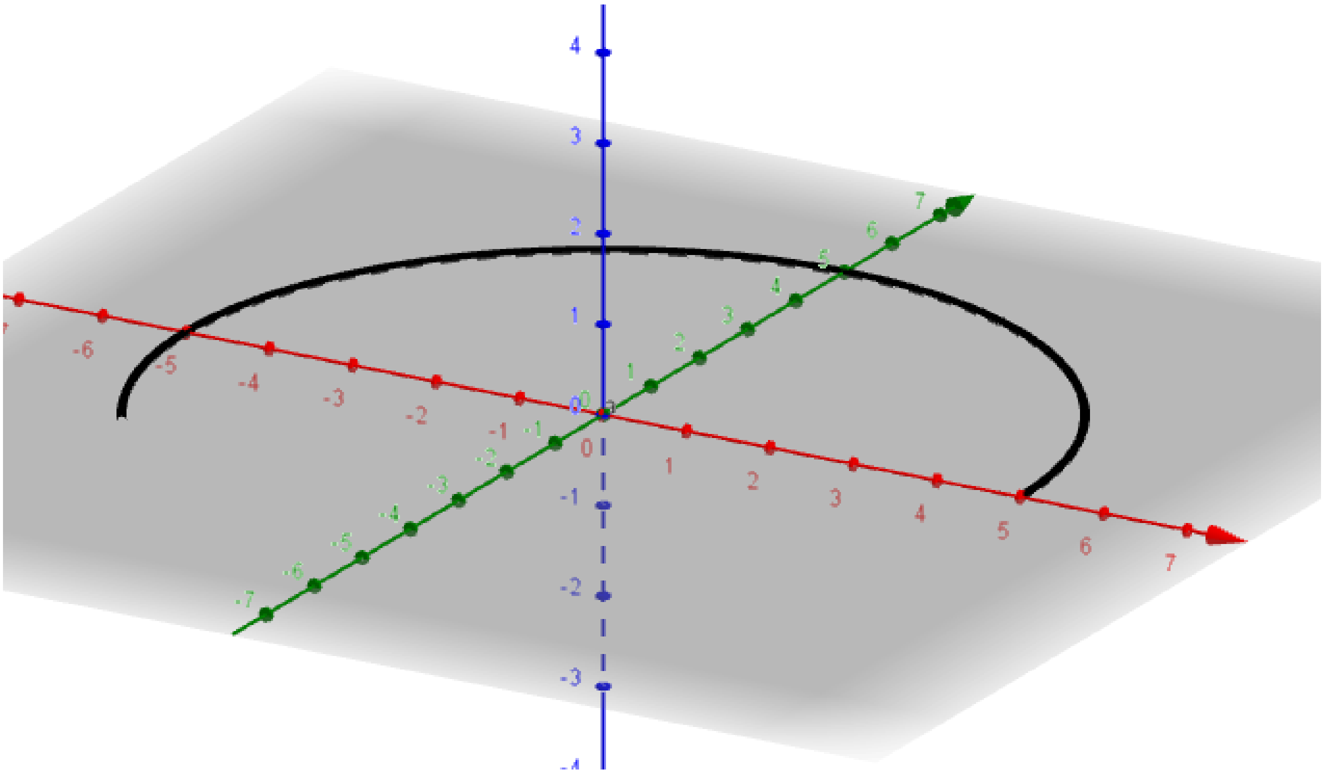
OPG 6: tegne cirkel i GeoGebra (3D)

Start GeoGebra.
Vælg "Vis", og derefter "3D Grafik".
NB: "Tegneblokken" bruges til skyderne, men kan godt gøres smallere!

I indtastningsfeltet forneden skrives: **Kurve(5*cos(t), 5*sin(t),0, t, 0, k)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette *skyder* til k. Sig ja!

Imidlertid opretter GeoGebra 2 skydere, nemlig til k og t. Slet den til t!
Ændrer skyderen til k, så den går fra 0 til 10.

Skærmbilledet i 3D kan så se sådan ud:



NB: projektionen på 2D (dvs. (x,y) kan ses på "Tegneblokken"!

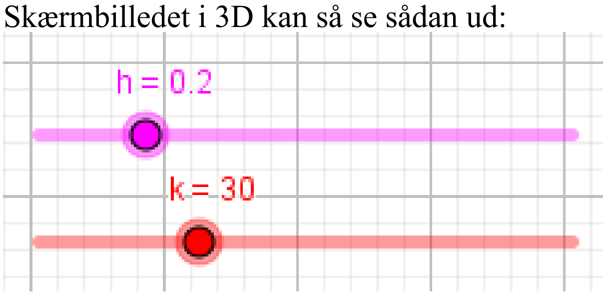
Når man øger værdien af k, så indtegnes mere og mere af cirklen.
Når k overstiger $2 \cdot \pi$, så er man kommet en hel omgang rundt.

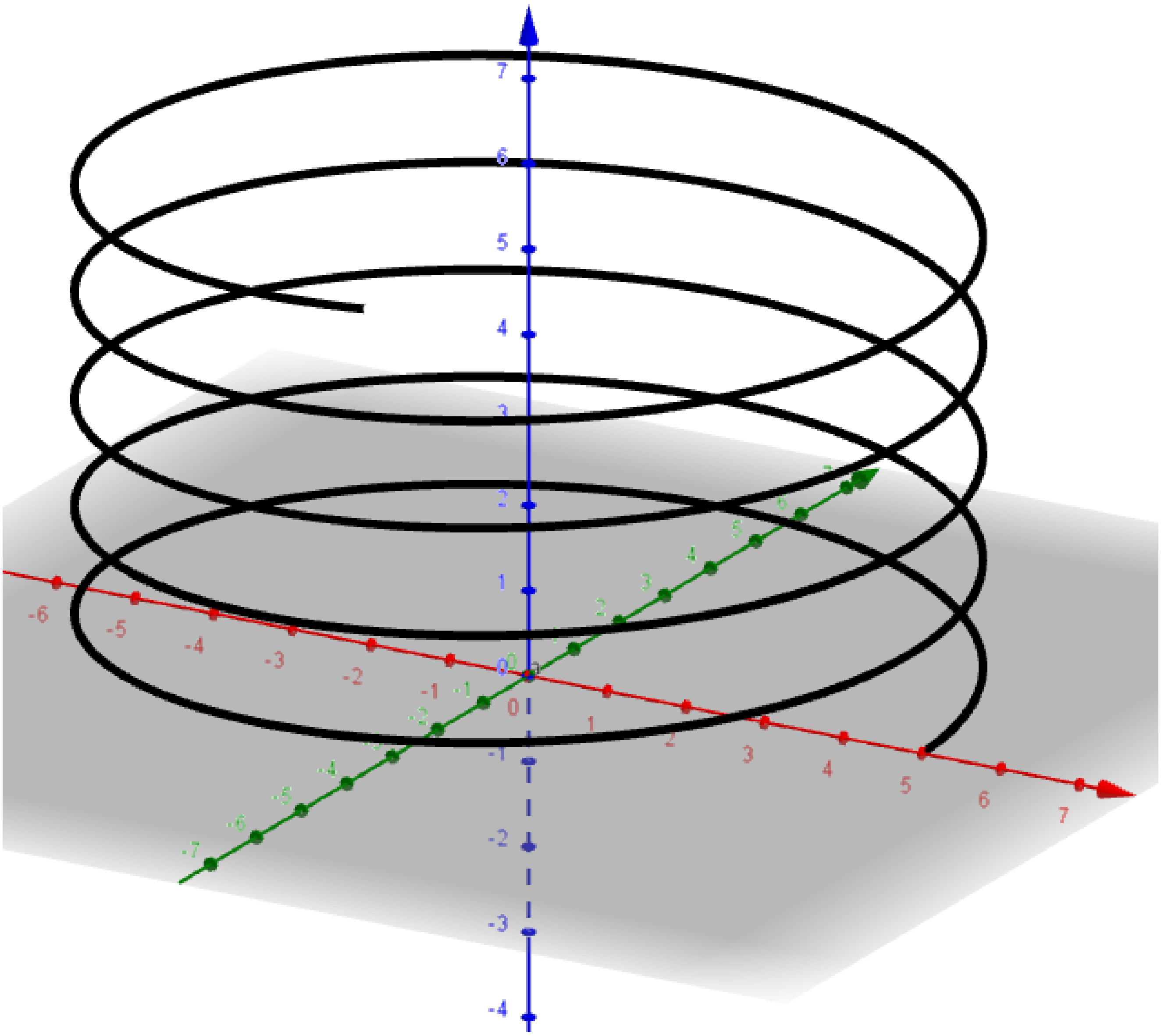
OPG 7: tegne spiral i GeoGebra (3D)

Start GeoGebra.
Vælg "Vis", og derefter "3D Grafik".
NB: "Tegneblokken" bruges til skyderne, men kan godt gøres smallere!

I indtastningsfeltet forneden skrives: **Kurve(5*cos(t), 5*sin(t),h*t, t, 0, k)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette 2 *skydere* til k og h. Sig ja!
Imidlertid opretter GeoGebra 3 skydere, nemlig til k, h og t. Slet den til t!
Indstil skyderen til k, så de begge går fra 0 til 100.
Indstil skyderen til h, så de begge går fra 0 til 1.

Skærmbilledet i 3D kan så se sådan ud:





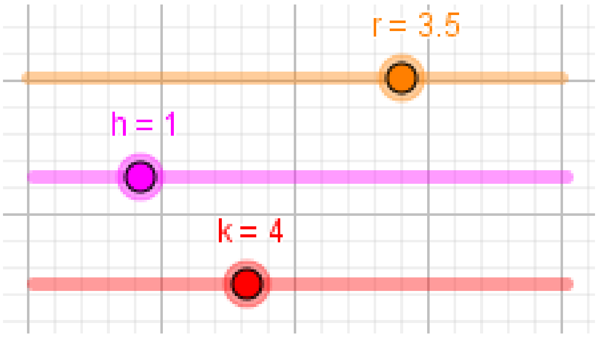
Når man øger værdien af k, så indtegnes mere og mere af spiralen.
Når man øger værdien af h, så bliver afstanden mellem de enkelte omgange større.

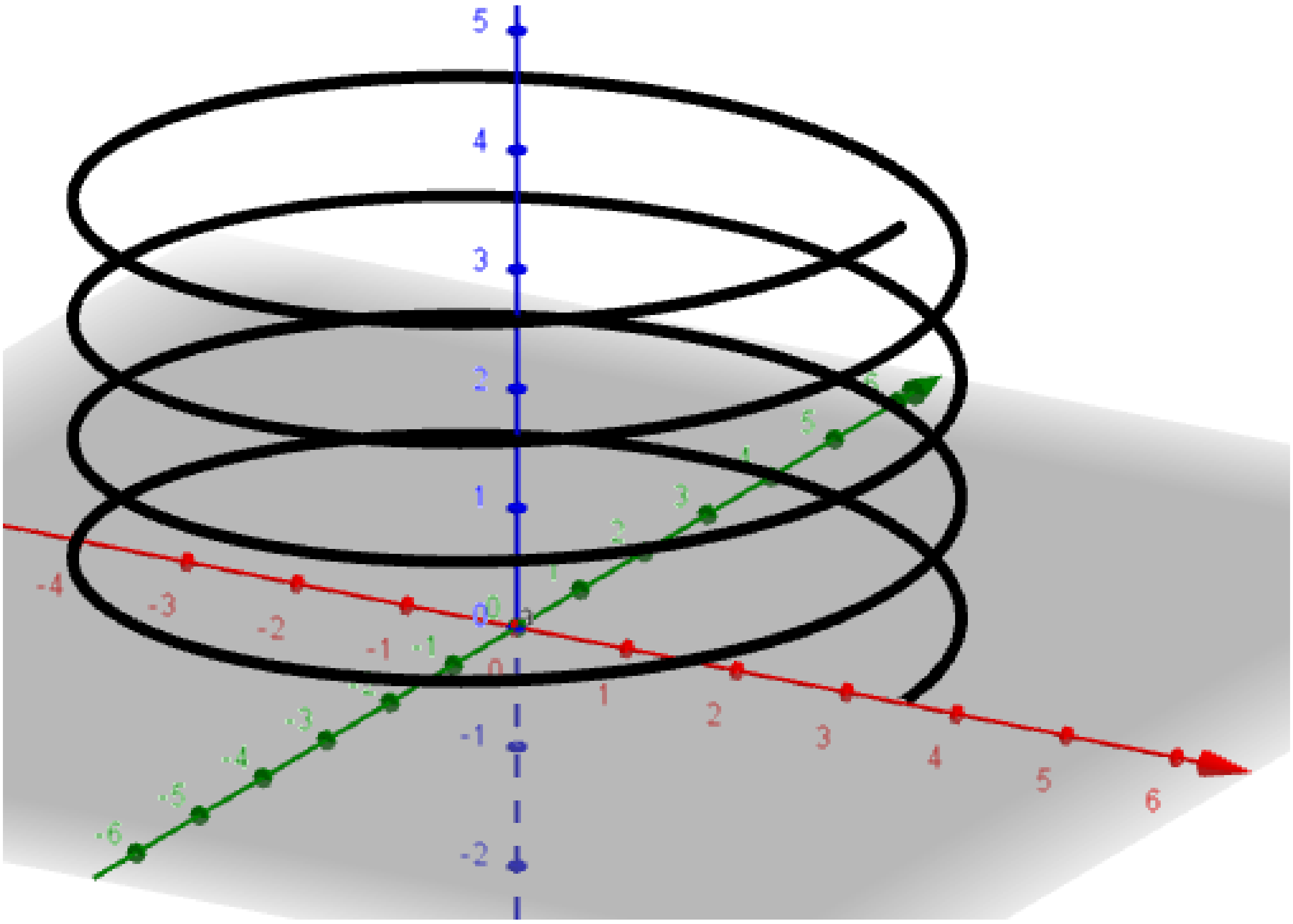
OPG 8: tegne ny spiral i GeoGebra (3D)

Start GeoGebra.
Vælg "Vis", og derefter "3D Grafik".
NB: "Tegneblokken" bruges til skyderne, men kan godt gøres smallere!

I indtastningsfeltet forneden skrives: **Kurve(r*cos(2*pi*t), r*sin(2*pi*t),h*t, t, 0, k)**. Afslut med ENTER.
GeoGebra foreslår så, at oprette 3 *skydere* til k, h og r. Sig ja!
Imidlertid opretter GeoGebra 4 skydere, nemlig til k, h, r og t. Slet den til t!
Indstil skyderen til k, så den går fra 0 til 10.
Indstil skyderen til h, så den går fra 0 til 5.
Indstil skyderen til r, så den går fra 0 til 5.

Skærmbilledet i 3D kan så se sådan ud:





Skyderen r angiver radius i spiralen.
Skyderen h angiver den lodrette afstand mellem 2 spiraler.
Skyderen k angiver antal omgange.

OPG 9: Beregning af længden af spiralen

Vi tager udgangspunkt i spiralen, som er indtegnet i opgave 8 med formlen:
Kurve(r*cos(2*pi*t), r*sin(2*pi*t),h*t, t, 0, k)

Matematisk set kan vi beskrive parameterfremstillingen sådan:

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) = r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ z(t) = h \cdot t \end{cases}$$

hvor r angiver radius i spiralen, h angiver den lodrette afstand mellem 2 spiraler, og k angiver antal omgange.

Hvis man tager én omgang på spiralen, så er man rykket h i lodret retning.
Hvis man tænker sig den ene omgang er en snor, som man skal rette ud,
så får man en retvinklet trekant med den lodrette katete med længden h , og den vandrette katete med længden $2 \cdot \pi \cdot r$ (cirklens omkreds).

Simpelt bevis for formlen for spiralens længde

Man kan så opstille en formel for længden af hypotenusen, som er længden af spiralens ene omgang.

I følge Pythagoras læresætning, så må hypotenusens længde være $\sqrt{h^2 + (2 \cdot \pi \cdot r)^2}$

Hvis spiralen består af k omgange, så må der gælde følgende formel:

$$\boldsymbol{spiralens\ længde = k \cdot \sqrt{h^2 + (2 \cdot \pi \cdot r)^2}}$$

Alternativt bevis

Man kan læse om beregning af længden af en skruelinje her: https://www.webmatematik.dk/lektioner/sarligt-for-htx/geometri/skruelinje

Der udledes formlen via differentialregning og integralregning!

Bevis ved **håndregning**, idet "idiotformlen" anvendes ($\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$):

$$\int_0^k \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$

$$\int_0^k \sqrt{((r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))')^2 + ((r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t))')^2 + ((h \cdot t)')^2}\, dt =$$

$$\int_0^k \sqrt{(r \cdot 2 \cdot \pi \cdot (-\sin(2 \cdot \pi \cdot t)))^2 + (r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))^2 + h^2}\, dt =$$

$$\int_0^k \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 \cdot ((\sin(2 \cdot \pi \cdot t))^2 + (\cos(2 \cdot \pi \cdot t))^2) + h^2}\, dt =$$

$$\int_0^k \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 + h^2}\, dt = \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 + h^2} \cdot \int_0^k 1\, dt =$$

$$\sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 + h^2} \cdot [t]_0^k = \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 + h^2} \cdot (k - 0) = \underline{\underline{k \cdot \sqrt{h^2 + (2 \cdot \pi \cdot r)^2}}}$$

Bevis, hvor Maple reducerer udtrykket:

$$restart : \int_0^k \sqrt{\left(\frac{d}{dt}(r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(h \cdot t)\right)^2}\, dt =$$

Warning, unable to determine if 1/4+(1/2)*_Z1 is between 0 and k; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\int_0^k \sqrt{4 r^2 \pi^2 \sin(2 \pi t)^2 + 4 r^2 \pi^2 \cos(2 \pi t)^2 + h^2}\, dt \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

$simplify(\%) =$

Warning, unable to determine if 1/4+(1/2)*_Z3 is between 0 and k; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\sqrt{4\,\pi^2\,r^2+h^2}\;k \tag{5.2.2}$$

Med hiv og sving får Maple den korrekte formel.

Konkret beregnings eksempel

Beregn længden af en spiral, som har følgende egenskaber: højden mellem 2 omgange er 1 m, radius i spiralen er 4 m, og spiralen har 10 omgange?

Svar: $restart : h := 1 : r := 4 : k := 10 : SpiralLængde := k\cdot\sqrt{h^2+(2\cdot\pi\cdot r)^2} = 10\sqrt{64\,\pi^2+1}$ $\xrightarrow{\text{at 10 digits}}$ 251.5262773

Konklusion: spiralens længde er ca. $\underline{\underline{251.53\ m}}$

NB: Hvis man ikke tager højdestigningen i betragtning, så vil 10 omgange på cirklen have en længde på:

$restart : h := 1 : r := 4 : k := 10 : Længde := k\cdot(2\cdot\pi\cdot r) = 80\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 251.3274123$

Dvs. længden ville så være ca. $\underline{\underline{251.33\ m}}$, altså næsten det samme. Sølle 20 cm i forkel på 251 m!!