

MODELLERING AF SKOVTÅRNET 2019

1

Steen Toft Jørgensen, Matematik 1, DTU Compute (2009-)
(1979-2018: Helsingør Gymnasium)

SKOVTÅRNET PÅ SYDSJÆLLAND



FACTS OM SKOVTÅRNET

- Facts modtaget via mailkontakt.
- Facts:
 - *Tårnet er 45 m højt.*
 - *Hyperboloiden er 28 m foroven og forneden i diameter, og 14 m i diameter i midten (smalleste sted).*
 - *Rampen er 1.8 m bred (er dog bredere ved foden).*
 - *Rampen løber 12 gange rundt.*
Der er anvendt 7550 stk. brædder til rampen og platformen i toppen.
 - *Stålstængerne består af 18 stk. hver vej (høre om og venstre om).*
- <https://www.campadventure.dk/facts/>

MODELLERING

- Cirkulær hyperboloide, dvs. $b = a$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- Bestemmelse af a og c via punkterne: $(7, 0)$ og $\left(14, \frac{45}{2}\right)$
- Parametrisering af den krumme overflade på hyperboloiden:

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Parametric_representations

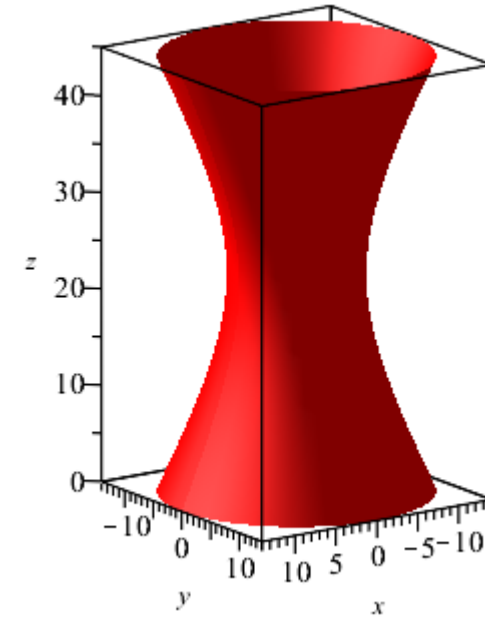
$$x = a \cosh v \cos \theta$$

$$y = b \cosh v \sin \theta$$

$$z = c \sinh v$$

MODELLERING

- Nu kan hyperboloidens overflade tegnes (skalatro):



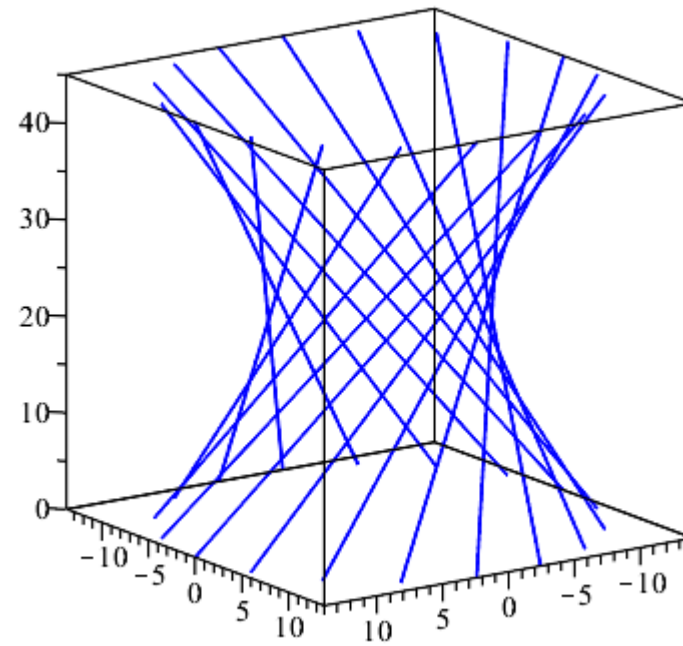
- Stålbjælkerne er rette linjer, som ligger i overfladen.
Parametrisering af linjerne:

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Lines_on_the_surface

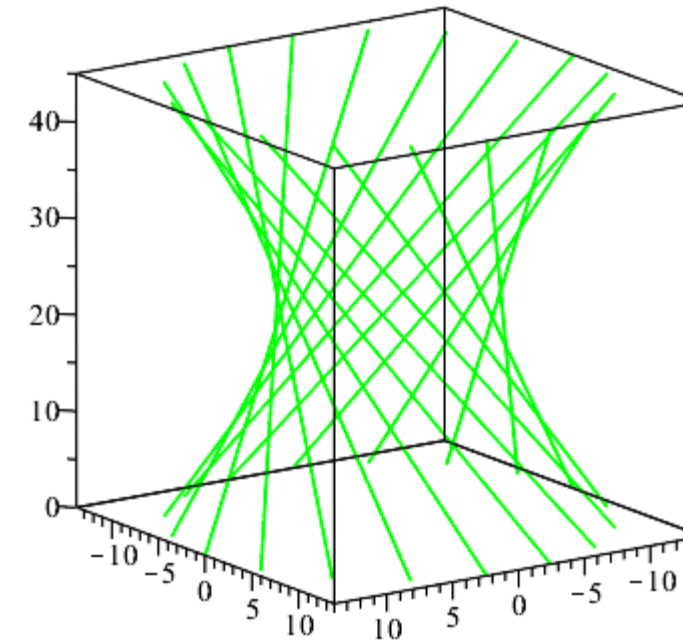
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \alpha \\ b \cos \alpha \\ \pm c \end{pmatrix}$$

MODELLERING

- Nu kan linjerne tegnes ”højre om”:

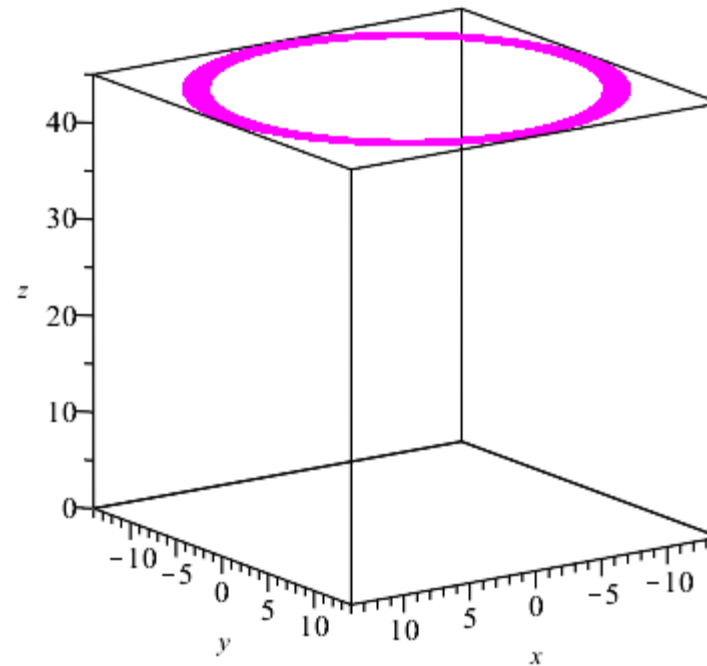
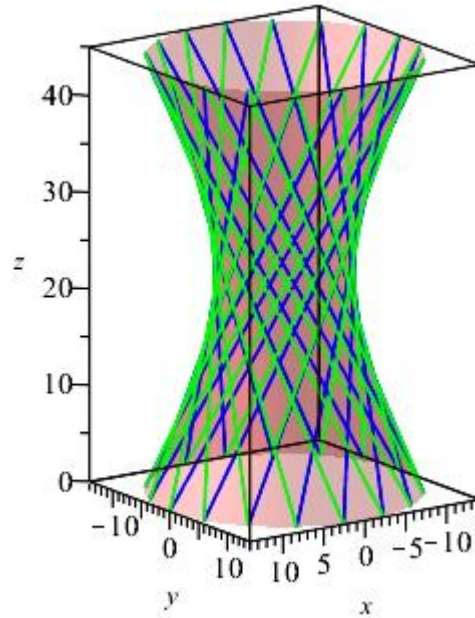


- Og venstre om:



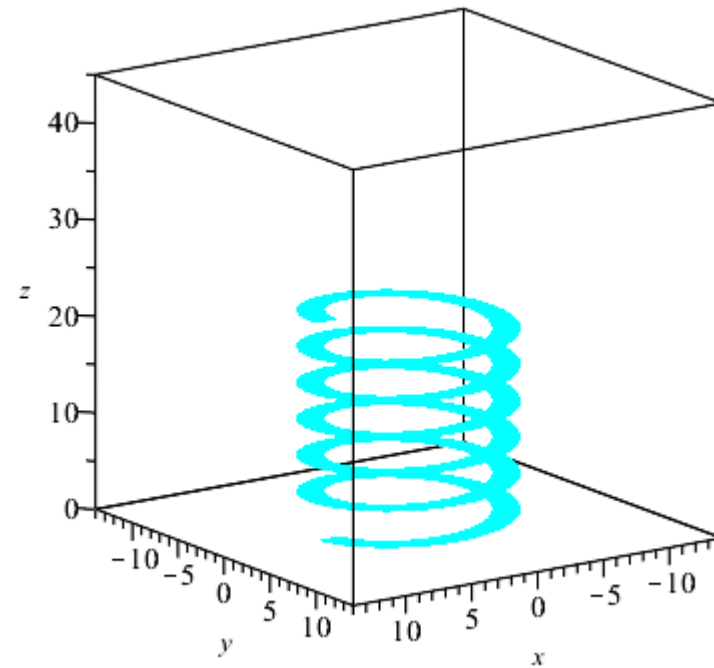
MODELLERING

- Samlet figur (skalatro):
- Platformen i toppen er et cirkelstykke:

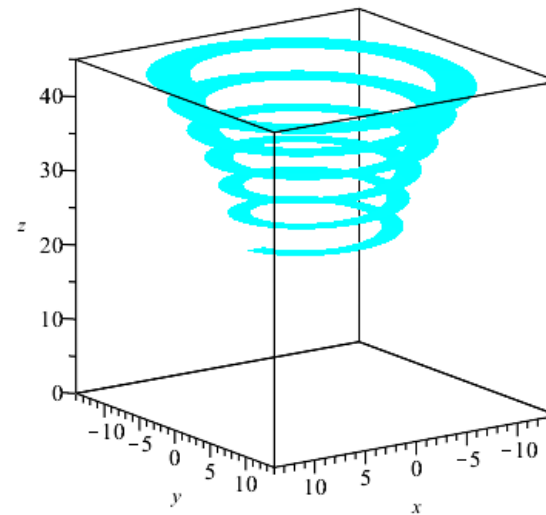
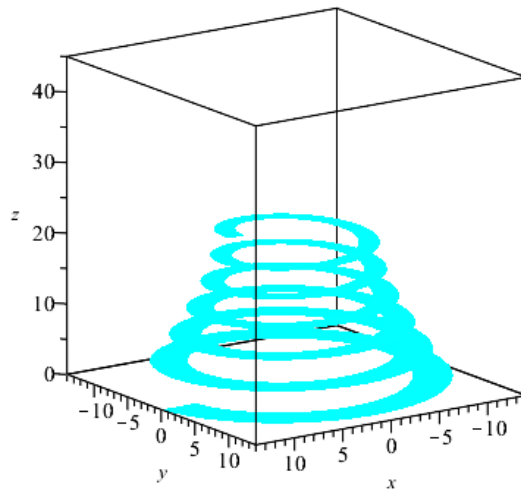


MODELLERING

- Rampen: 6 omgange på **nederste halvdel**:

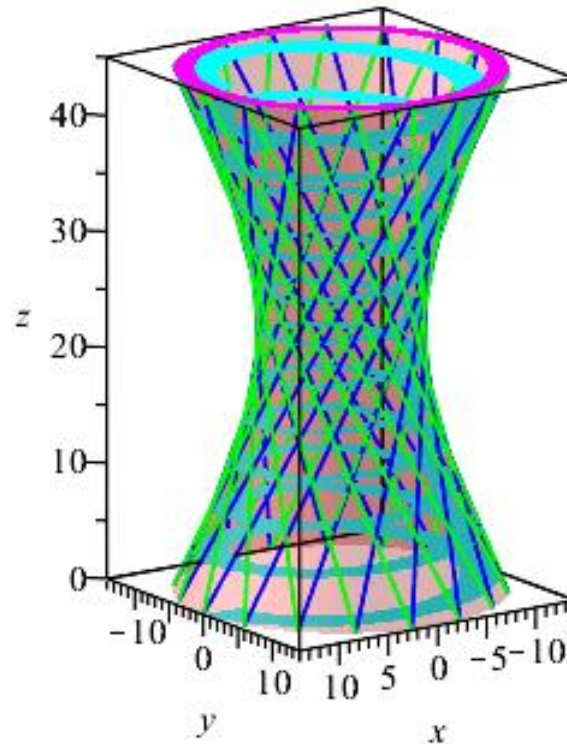
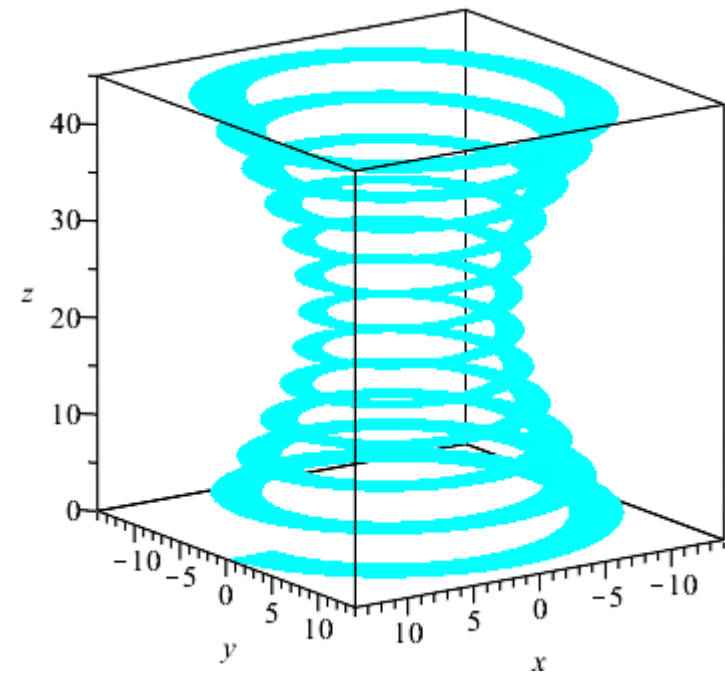


- Rampe tilpasses hyperboloidens bredde på **øverste og nederste halvdel**:

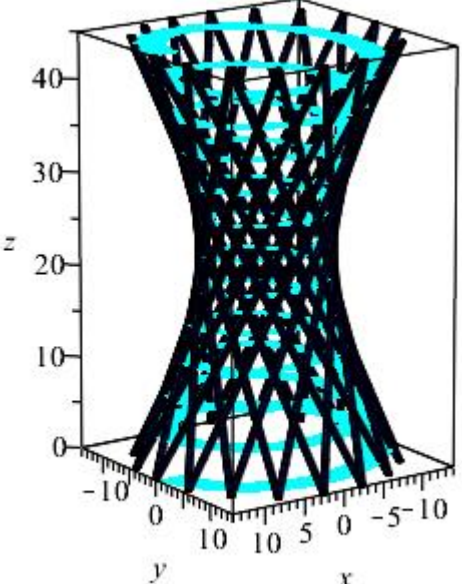
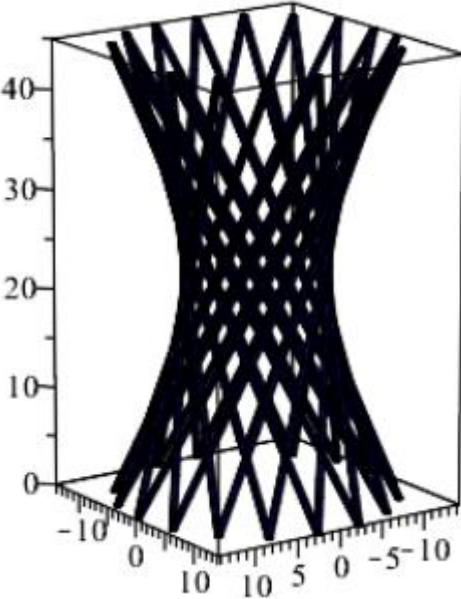
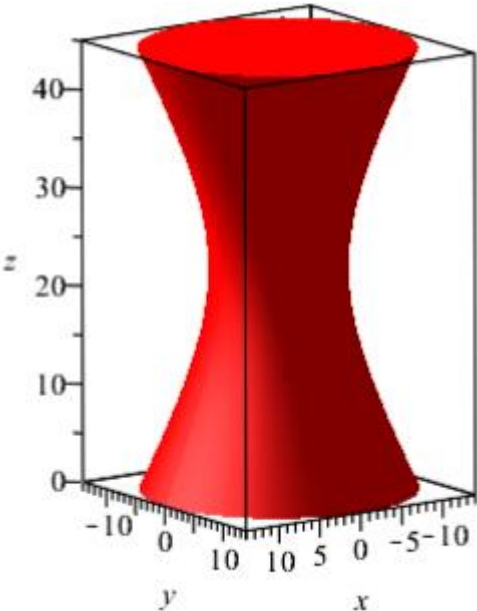


MODELLERING

- Sammensættes til hele rampen (12 omgange):
- Samlet model (skalatro)
 - Hyperboloide (transparent)
 - Stålstænger
 - Rampe
 - Platform



3D-FIGUR TIL VISNING



3D-FIGUR TIL VISNING

- I Maple genereres en rummelige figur via parametriseringer.
- Evt. sammenstykkedes figurer af flere dele via *display* i Maple.
- 3D-figurer i Maple navngives.

Hyperboloidens overflade:

```
pH := plot3d( r(v, θ) + ⟨0, 0, 45/2⟩, v = -v_max..v_max, θ = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid,  
labels = [x, y, z], scaling = constrained )
```

Top og bund:

```
r_topbund(u, v) := ⟨u·2·a·cos(v), u·2·a·sin(v), 0⟩ :
```

```
pTOP := plot3d( r_topbund(u, v) + ⟨0, 0, 45⟩, u = 0..1, v = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid,  
labels = [x, y, z], scaling = constrained ) :
```

```
pBUND := plot3d( r_topbund(u, v), u = 0..1, v = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid, labels = [x,  
y, z], scaling = constrained ) :
```

```
hyperbol := display( pH, pTOP, pBUND)
```

3D-FIGUR TIL VISNING

- Konverteres til en STL-fil.

Fremstilling af STL-filen "hyperbol.stl":

`Export("hyperbol.stl", hyperbol, base = homedir) = 691284`

NB: Filen ligger i brugerens mappe i Windows (f.eks. "C:\Users\Steen").

- En STL-fil er defineret via orienterede trekkanter:

KRAV til STL-filen:

* hver trekant skal have 2 hjørner fælles med hver nabotrekant

* hjørnerne i hver trekant er orienteret imod uret, og normalvektoren til hver trekant skal være uadgående (danner en højreskrue)

* hjørnerne skal alle have positive koordinater

- I ASCII-format:

```
solid name
facet normal  $n_i$   $n_j$   $n_k$ 
  outer loop
    vertex  $v1_x$   $v1_y$   $v1_z$ 
    vertex  $v2_x$   $v2_y$   $v2_z$ 
    vertex  $v3_x$   $v3_y$   $v3_z$ 
  endloop
endfacet
endsolid name
```

```
solid tetraeder

  facet normal 0 0 -5
    outer loop
      vertex 1 2 1
      vertex 2 5 1
      vertex 3 3 1
    endloop
  endfacet

  facet normal 6 3 4
    outer loop
      vertex 3 3 1
      vertex 2 5 1
      vertex 1 3 4
    endloop
  endfacet

  facet normal -9 3 -1
    outer loop
      vertex 2 5 1
      vertex 1 2 1
      vertex 1 3 4
    endloop
  endfacet

  facet normal 3 -6 2
    outer loop
      vertex 1 2 1
      vertex 3 3 1
      vertex 1 3 4
    endloop
  endfacet

endsolid tetraeder
```

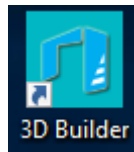
3D-FIGUR TIL VISNING

- STL-fil åbnes på Windows 10 med det indbyggede program:

- "3D viser



- "3D Builder"



- Her kan man rotere og zoome på objektet.

- STL-filen kan printes i plastik på en 3D-printer!

BEREGNINGER

- De rette linjer (stålbjælker) ligger helt på hyperboloidens overflade?
Bevis: indsætter parametriseringen af linjerne i hyperboloidens ligning.
- Længden af en stålbjælke (ret linje)?
Længden beregnes til ca. 51.1 m. Til sammenligning er tårnet 45 m højt.
- Drejningsvinklen af en stålbjælke (ret linje)?
Drejningsvinklen er præcis 120°, dvs. præcist 1/3 omgang.
- Overfladearealet af hyperboloiden?
*Hyperboloidens krumme overflade beregnes til ca. 2903 m².
Bund- og topcirklen har hvert et areal på ca. 616 m².
Samlet overfladeareal er ca. 4134 m².*

BEREGNINGER

- Rumfanget af hyperboloiden?
Rumfanget beregnes til ca. 13854 m^3 .
- Længden af rampen langs yderkanten?
Længden langs yderkanten beregnes til ca. 730 m .
- Længden af rampen langs inderkanten?
Længden langs inderkanten beregnes til ca. 543 m .
- Arealet af rampen?
Arealet af rampen beregnes til ca. 1660 m^2 .

METODERNE

- **Parametriseringer** findes på Wikipedia.
Wikipedia rummer utrolig meget matematik!
- **Plot-metoder** læres på Matematik 1 kurset på DTU.
Kurset er obligatorisk på 1. år for civilingeniør-studerende.
- **Beregnings-metoder** for længder, arealer, rumfang mm.
læres på Matematik 1 kurset på DTU.
Der anvendes altid parametriseringer af kurver, flader og rumlige områder.

OPGAVER TIL GYMNASIEBRUG

- **Opgaver med tilhørende løsning.**
- **Tegning af hyperbel (2D) og hyperboloide (3D) i GeoGebra:**
 - Opgave 1-4.
 - Opgave 5-9 (incl. simpelt bevis for længden af en spiral).
- **Beregninger på hyperbel (2D) og hyperboloide (3D):**
 - Opgave 10-12.

LINKS TIL SELVSTUDIE

- Om **Skovtårnet** (modellering, links til presseomtale og opgaver til gymnasiebrug):
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop.htm>
- Mere generelt om **3D-print, 3D-geometri & 3D-arkitektur**:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/>
 - For dataloger:
 - **STL-format til 3D** (generering af STL-fil ud fra Maple-figur & håndskrivning af STL-fil for simple figurer).
 - For matematikere:
 - **Grundlæggende geometriske konstruktioner** (rotation, skalering, translation, spejling).
 - **Sjove tårne** med forskellige egenskaber.
 - For alle:
 - **Kendte matematiske objekter** (f.eks. torus, oktaeder).
 - **Berømte bygninger** (f.eks. turning torso i Malmø, operaen i Beijing).

