

MODELLERING AF SKOVTÅRNET 2020

Steen Toft Jørgensen

(2009-) ekstern lektor, DTU Compute, Matematik 1

(1979-2018: pædagogisk faglig koordinator, Helsingør Gymnasium)



1

SKOVTÅRNET PÅ SYDSJÆLLAND



FACTS OM SKOVTÅRNET

- Facts modtaget via mailkontakt.
- Facts:
 - *Tårnet er 45 m højt.*
 - *Hyperboloiden er 28 m foroven og forneden i diameter, og 14 m i diameter i midten (smalleste sted).*
 - *Rampen er 1.8 m bred (er dog bredere ved foden).*
 - *Rampen løber 12 gange rundt.*
Der er anvendt 7550 stk. brædder til rampen og platformen i toppen.
 - *Stålstængerne består af 18 stk. hver vej (højre om og venstre om).*
- <https://www.campadventure.dk/facts/>

MODELLERING

- Cirkulær hyperboloide, dvs. $b = a$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- Bestemmelse af a og c via punkterne: $(7, 0)$ og $\left(14, \frac{45}{2}\right)$
- Parametrisering af den krumme overflade på hyperboloiden:

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Parametric_representations

One-surface hyperboloid: $v \in (-\infty, \infty)$

$$x = a \cosh v \cos \theta$$

$$y = b \cosh v \sin \theta$$

$$z = c \sinh v$$

MODELLERING

- Nu kan hyperboloidens overflade tegnes (skalatro):

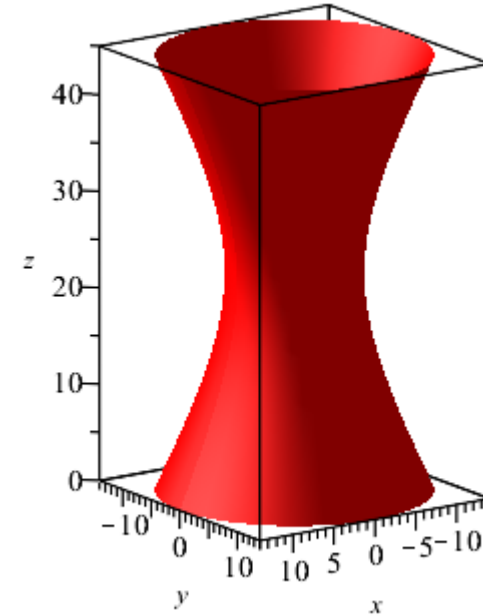
$$\left\{ a=7, c=\frac{15\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- Stålbjælkerne er rette linjer, som ligger i overfladen.

Parametrisering af linjerne:

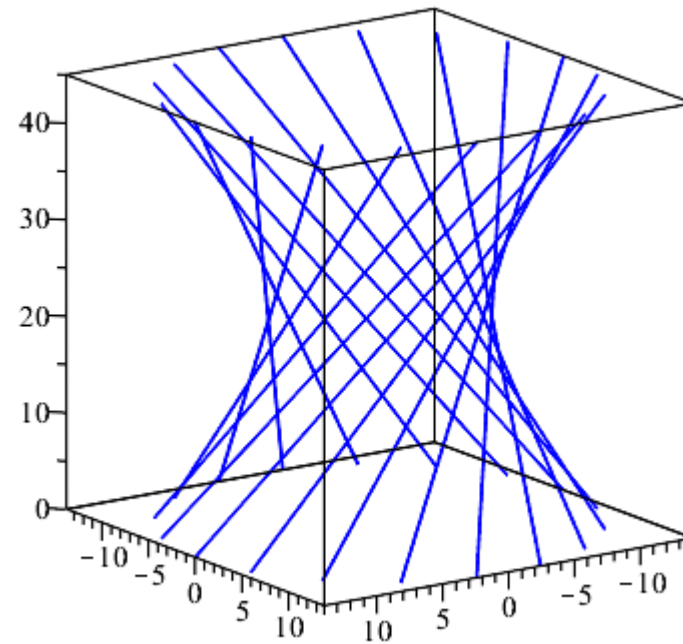
https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Lines_on_the_surface

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \alpha \\ b \cos \alpha \\ \pm c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

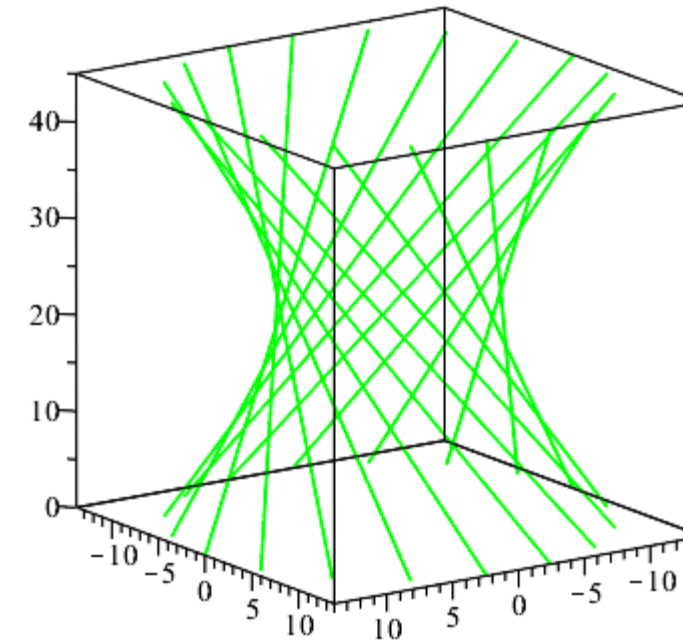


MODELLERING

- Nu kan linjerne tegnes "højre om":

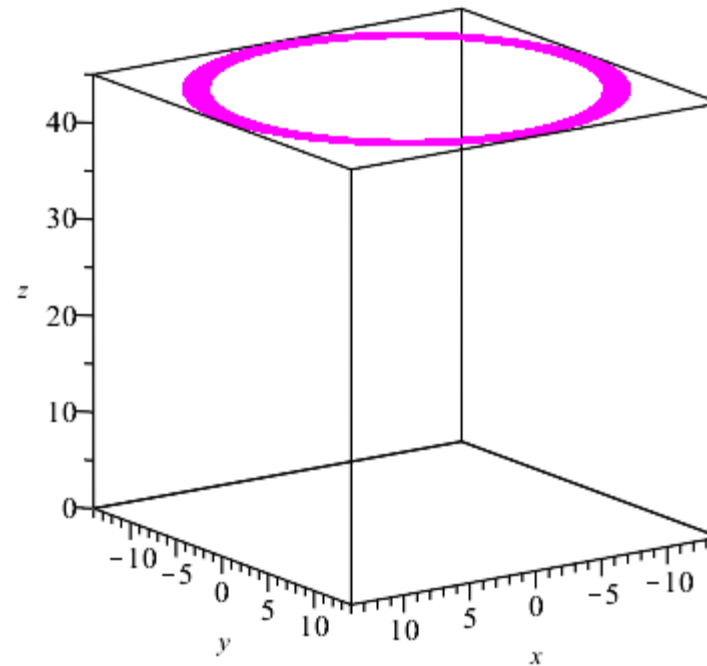
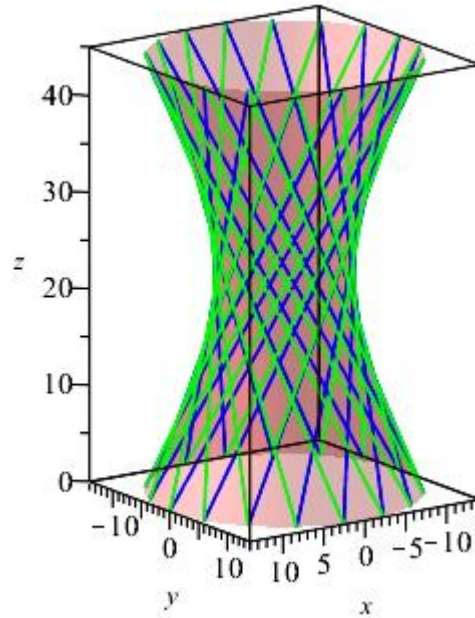


- Og "venstre om":



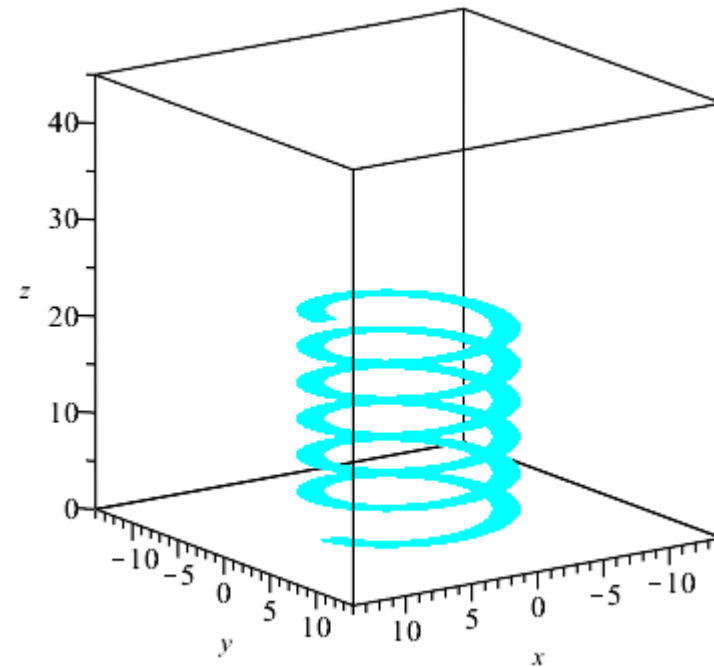
MODELLERING

- Samlet figur (skalatro):
- Platformen i toppen er et cirkelstykke:

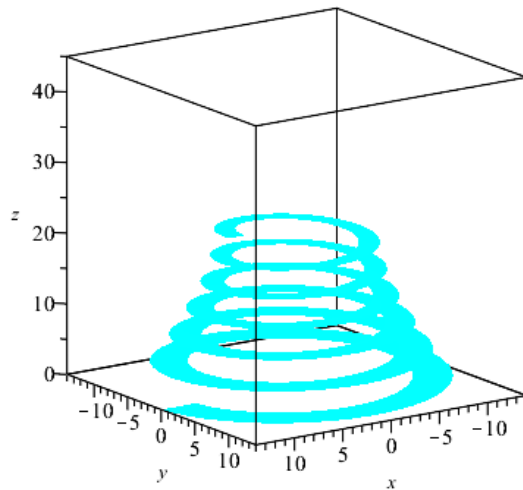


MODELLERING

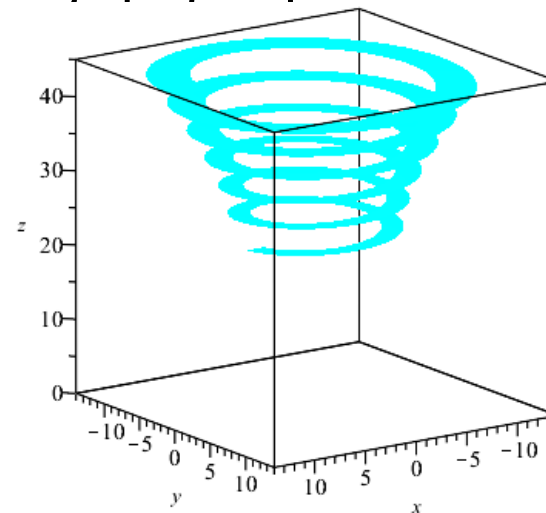
- Rampen: 6 omgange på **nederste halvdel**:
(her tegnet med konstant radius)



- Rampe tilpasses hyperboloidens bredde på nederste halvdel:

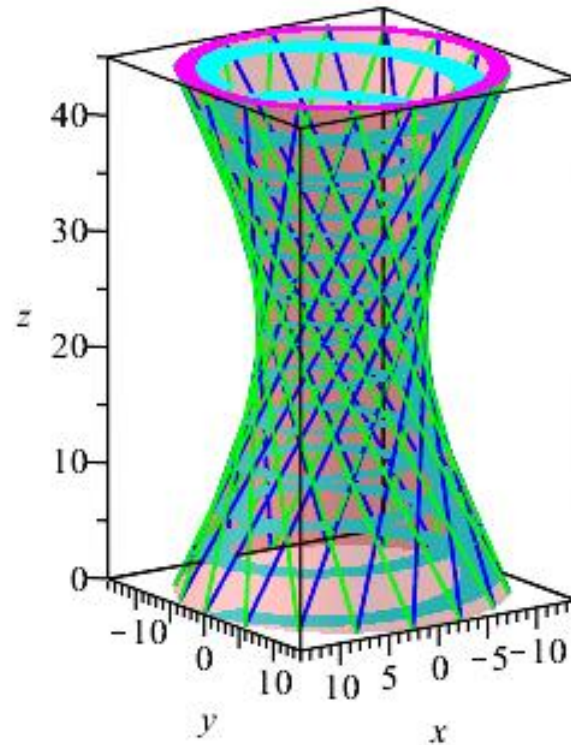
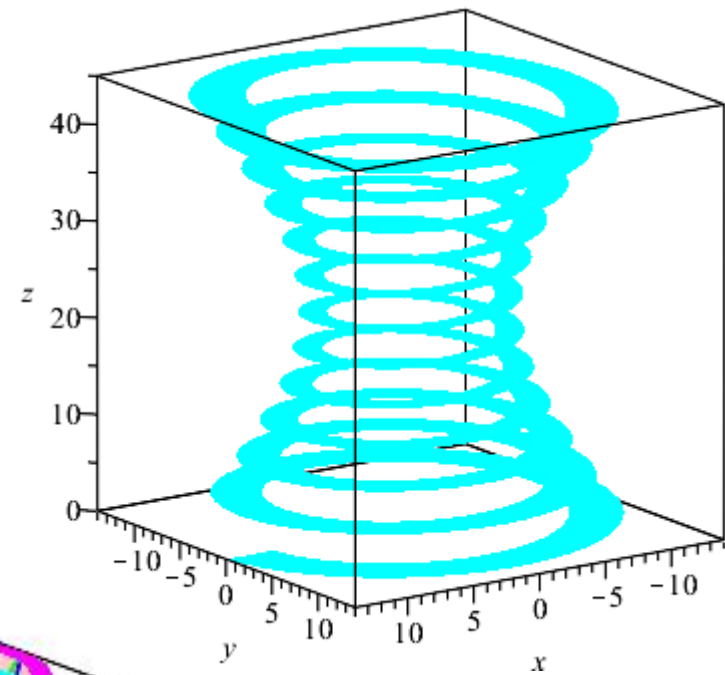


Og spejles på øverste halvdel:



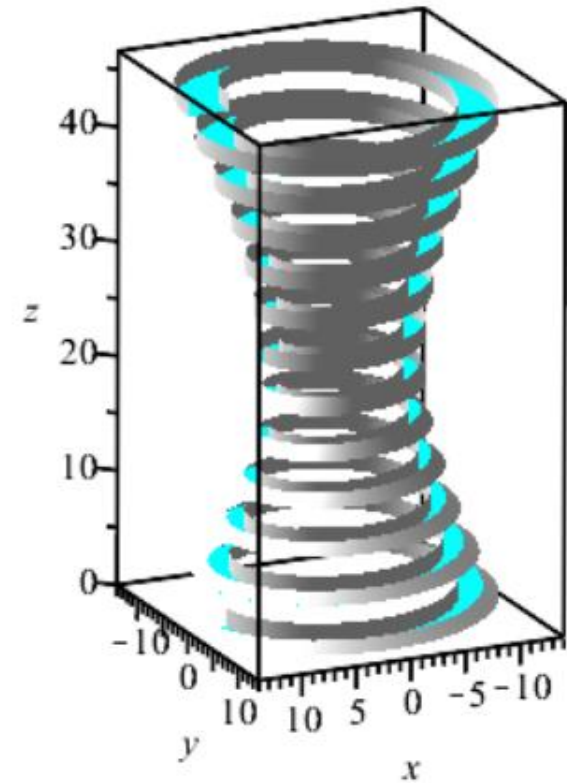
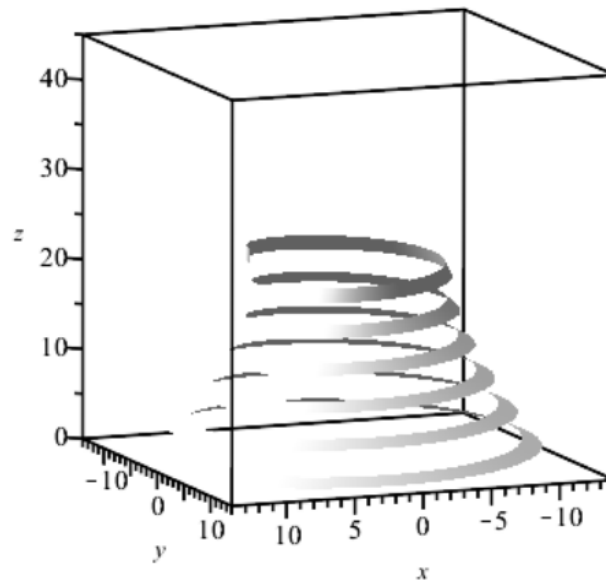
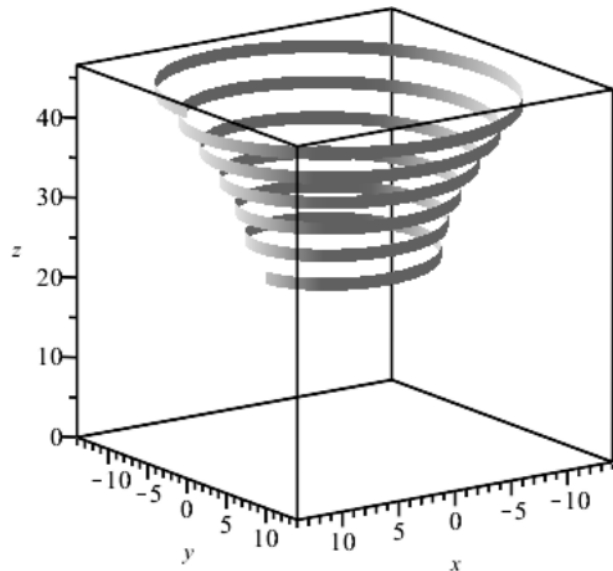
MODELLERING

- Sammensættes til hele rampen (12 omgange):
- Samlet model (skalatro)
 - Hyperboloide (transparent)
 - Stålstænger (venstre/højre om)
 - Rampe
 - Platform (foroven)



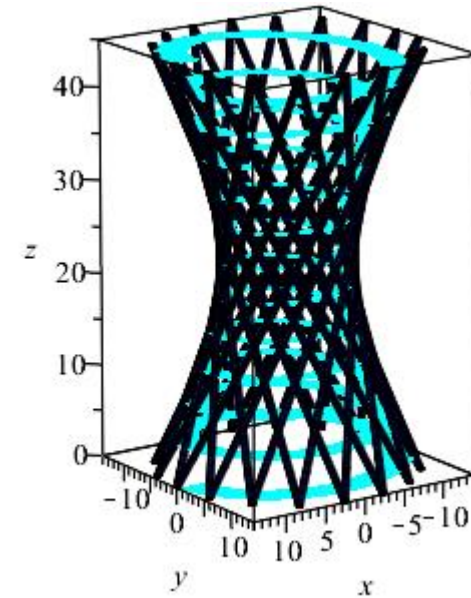
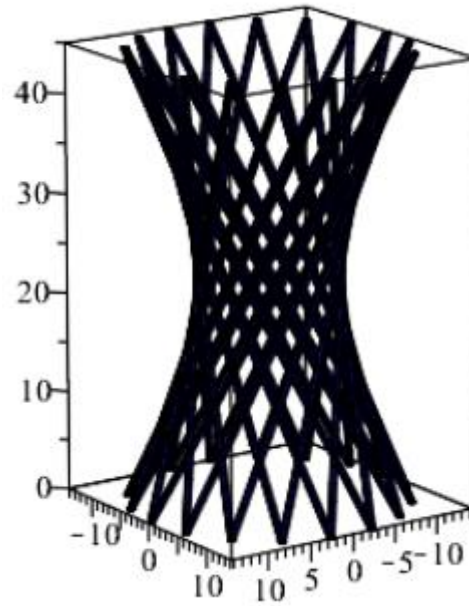
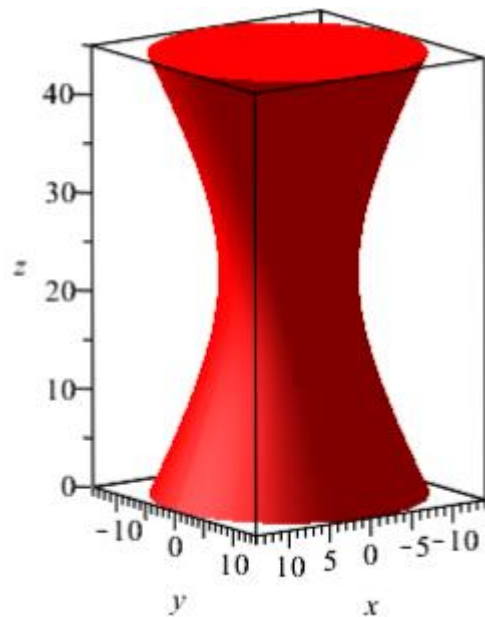
MODELLERING

- **Gelænder/rækværk** inderst og yderst på rampen.
- Lodret inderst.
- Lodret yderst foroven.
- **Men yderst forneden følger det hyperboloidens tangentplaner!**



3D-FIGUR TIL VISNING

Maple kan generere 3D-figur (*STL-format*), som kan vises i "3D Builder" på Windows 10.



3D-FIGUR TIL VISNING

- I Maple genereres en rummelige figur via parametriseringer.
- Evt. sammenstykkedes figurer af flere dele via "display" i Maple.
- 3D-figurer i Maple navngives.

Hyperboloidens overflade:

```
pH := plot3d( r(v, θ) + ⟨0, 0, 45/2⟩, v = -v_max..v_max, θ = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid,  
labels = [x, y, z], scaling = constrained )
```

Top og bund:

```
r_topbund(u, v) := ⟨u·2·a·cos(v), u·2·a·sin(v), 0⟩ :
```

```
pTOP := plot3d( r_topbund(u, v) + ⟨0, 0, 45⟩, u = 0..1, v = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid,  
labels = [x, y, z], scaling = constrained ) :
```

```
pBUND := plot3d( r_topbund(u, v), u = 0..1, v = 0..2·π, color = red, style = patchnogrid, labels = [x,  
y, z], scaling = constrained ) :
```

```
hyperbol := display( pH, pTOP, pBUND)
```

3D-FIGUR TIL VISNING

- Konverteres til en STL-fil.

Fremstilling af STL-filen "hyperbol.stl":

`Export("hyperbol.stl", hyperbol, base = homedir) = 691284`

NB: Filen ligger i brugerens mappe i Windows (f.eks. "C:\Users\Steen").

- En STL-fil er defineret via orienterede trekkanter:

KRAV til STL-filen:

* hver trekant skal have 2 hjørner fælles med hver nabotrekant

* hjørnerne i hver trekant er orienteret imod uret, og normalvektoren til hver trekant skal være uadgående (danner en højreskrue)

* hjørnerne skal alle have positive koordinater

NB: positive koordinater er ikke nødvendige her!

- I ASCII-format:
(kan skrives i Notesblok på Windows 10)

```
solid name
```

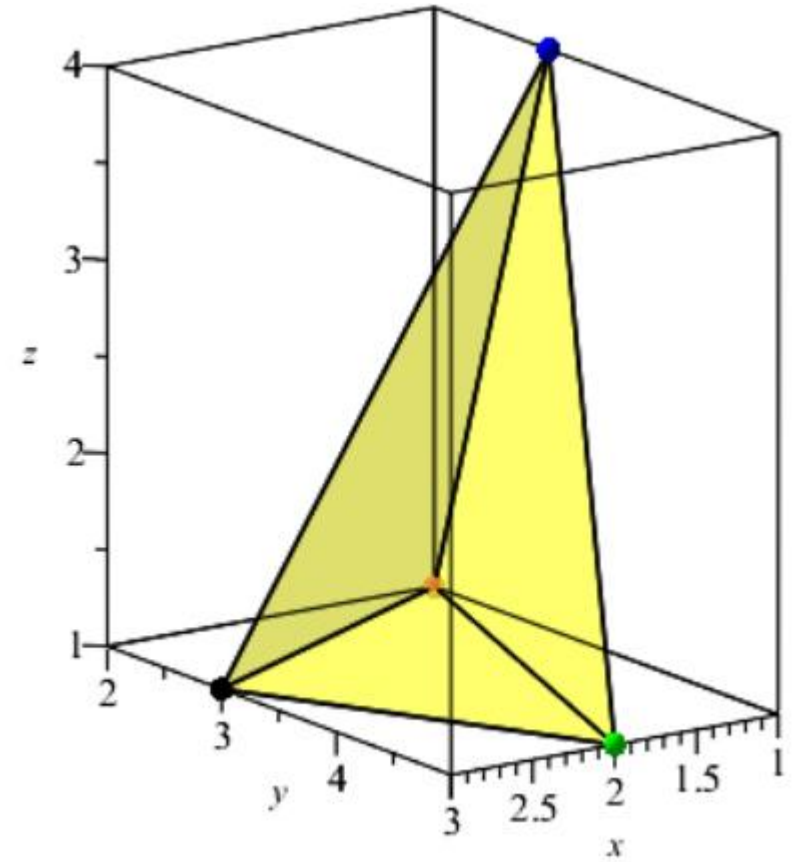
```
facet normal  $n_i$   $n_j$   $n_k$   
  outer loop  
    vertex  $v_{1x}$   $v_{1y}$   $v_{1z}$   
    vertex  $v_{2x}$   $v_{2y}$   $v_{2z}$   
    vertex  $v_{3x}$   $v_{3y}$   $v_{3z}$   
  endloop  
endfacet
```

```
endsolid name
```

```
solid tetraeder  
  
  facet normal 0 0 -5  
    outer loop  
      vertex 1 2 1  
      vertex 2 5 1  
      vertex 3 3 1  
    endloop  
  endfacet  
  
  facet normal 6 3 4  
    outer loop  
      vertex 3 3 1  
      vertex 2 5 1  
      vertex 1 3 4  
    endloop  
  endfacet  
  
  facet normal -9 3 -1  
    outer loop  
      vertex 2 5 1  
      vertex 1 2 1  
      vertex 1 3 4  
    endloop  
  endfacet  
  
  facet normal 3 -6 2  
    outer loop  
      vertex 1 2 1  
      vertex 3 3 1  
      vertex 1 3 4  
    endloop  
  endfacet  
  
endsolid tetraeder
```

STL-FIL MED HÅNDSKRIVNING

- <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/opgaver.htm>
- Håndregning på skævt tetraeder:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/tetra/tetra2.pdf>



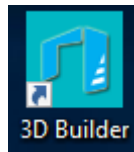
3D-FIGUR TIL VISNING

- STL-fil åbnes på Windows 10 med det indbyggede program:

- "3D viser"



- "3D Builder"



- Her kan man rotere og zoome på objektet.

- STL-filen kan printes i plastik på en **3D-printer!**

BEREGNINGER

- **De rette linjer (stålbjælker) ligger helt på hyperboloidens overflade?**
Bevis: indsætter parametriseringen af linjerne i hyperboloidens ligning.
- **Længden af en stålbjælke (ret linje)?**
Længden beregnes til ca. 51.1 m. Til sammenligning er tårnet 45 m højt.
- **Drejningsvinklen af en stålbjælke (ret linje)?**
Drejningsvinklen er præcis 120°, dvs. præcist 1/3 omgang.
- **Overfladearealet af hyperboloiden?**
*Hyperboloidens krumme overflade beregnes til ca. 2903 m².
Bund- og topcirklen har hvert et areal på ca. 616 m².
Samlet overfladeareal er ca. 4134 m².*

BEREGNINGER

- **Rumfanget af hyperboloiden?**
Rumfanget beregnes til ca. 13854 m^3 .
- **Længden af rampen langs yderkanten?**
Længden langs yderkanten beregnes til ca. 730 m .
- **Længden af rampen langs inderkanten?**
Længden langs inderkanten beregnes til ca. 543 m .
- **Arealet af rampen?**
Arealet af rampen beregnes til ca. 1660 m^2 .

METODERNE

- **Parametriseringer** findes på Wikipedia.
Wikipedia rummer utrolig meget matematik!
- **Plot-metoder** læres på Matematik 1 kurset på DTU.
Kurset er obligatorisk på 1. år for civilingeniør-studerende.
- **Beregnings-metoder** for længder, arealer, rumfang mm.
Læres på Matematik 1 kurset på DTU.
*NB: der anvendes altid parametriseringer af kurver, flader og rumlige områder.
Formler til beregning, når man har en parametrisering:*
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop/present/integral.pdf>

OPGAVER TIL GYMNASIEBRUG

- **Opgaver med tilhørende løsning.**
- **Tegning af hyperbel (2D) og hyperboloide (3D) i GeoGebra:**
 - Opgave 1-4.
 - Opgave 5-9 (inkl. simpelt bevis for længden af en spiral).
- **Beregninger på hyperbel (2D) og hyperboloide (3D):**
 - Opgave 10-12.

LINKS TIL SELVSTUDIE

- Om **Skovtårnet** (modellering, links til presseomtale og opgaver til gymnasiebrug):
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop.htm>
- Mere generelt om **3D-print, 3D-geometri & 3D-arkitektur**:
<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/>
 - For dataloger:
 - **STL-format til 3D** (generering af STL-fil ud fra Maple-figur & håndskrivning af STL-fil for simple figurer).
 - For matematikere:
 - **Grundlæggende geometriske konstruktioner** (rotation, skalering, translation, spejling).
 - **Sjove tårne** med forskellige egenskaber.
 - For alle:
 - **Kendte matematiske objekter** (f.eks. torus, oktaeder).
 - **Berømte bygninger** (f.eks. turning torso i Malmø, operaen i Beijing).

GRUNDLÆGGENDE GEOMETRISKE KONSTRUKTIONER

- **Rotation, skalering, translation, spejling:**

Kan alle udføres ved brug af vektorer og matricer i 3D.

<https://steen-toft.dk/mat/3d-print/geometri.htm>

ROTATION OM AKSE

- **Rotationsakse på x-aksen, y-aksen eller z-aksen:**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#In three dimensions](https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#In_three_dimensions)

- **Vilkårlig rotationsakse (metode):**

- (1) Parallelforskyd rotationsaksen, så den går gennem origo,
- (2) roter så rotationsaksen følger en af koordinatsystemets akser,
- (3) roter figuren den ønskede vinkel,
- (4) inverter (2)
- (5) inverter (1)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indbygget funktion *RotationMatrix* i Maple:

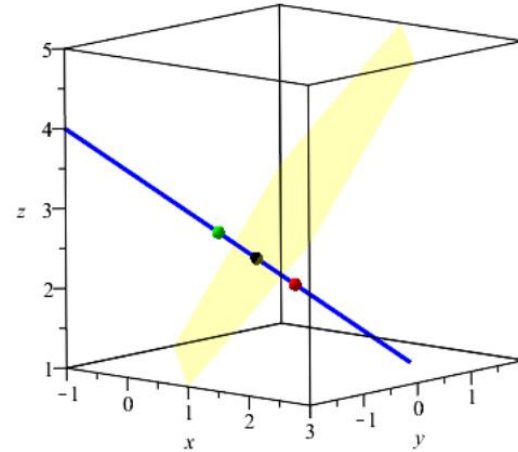
<https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Student/LinearAlgebra/RotationMatrix&term=RotationMatrix>

SPEJLING I PUNKT, LINJE ELLER PLAN.

Plan:

Metode

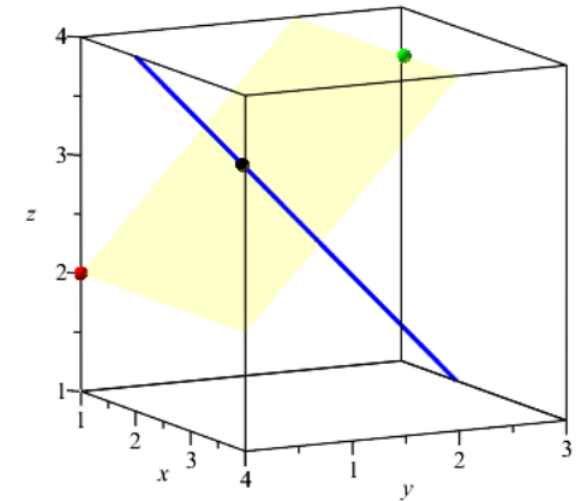
Danner en linje l gennem punktet P vinkelret på plan α .
Retningsvektoren for linje l er normalvektoren for plan α .
Beregner skæringspunktet S mellem linje l og plan α .
Derefter kan P spejles i S , og spejlpunktet P_α er fundet.



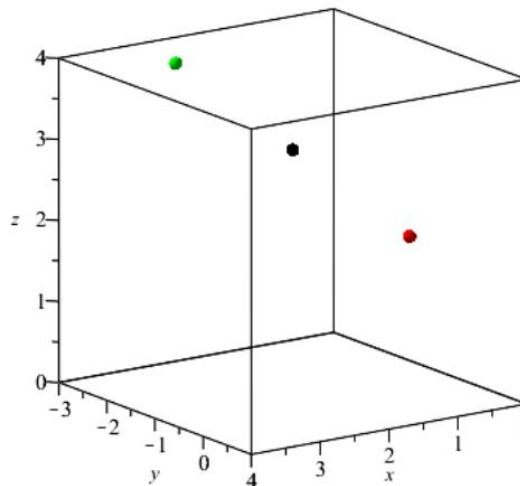
Linje:

Metode

Danner et plan α gennem punktet P vinkelret på linjen l .
Normalvektor for planen α er retningsvektoren for linjen l .
Beregner skæringspunktet S mellem plan α og linje l .
Derefter kan P spejles i S , og spejlpunktet P_l er fundet.

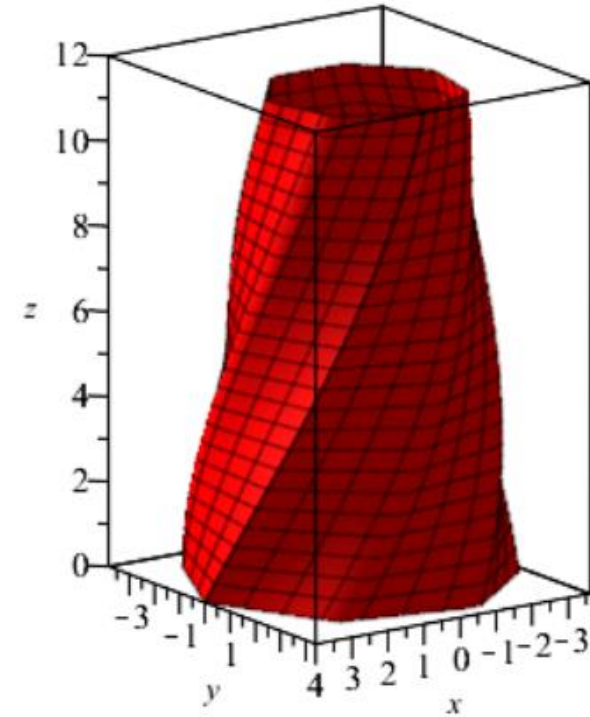
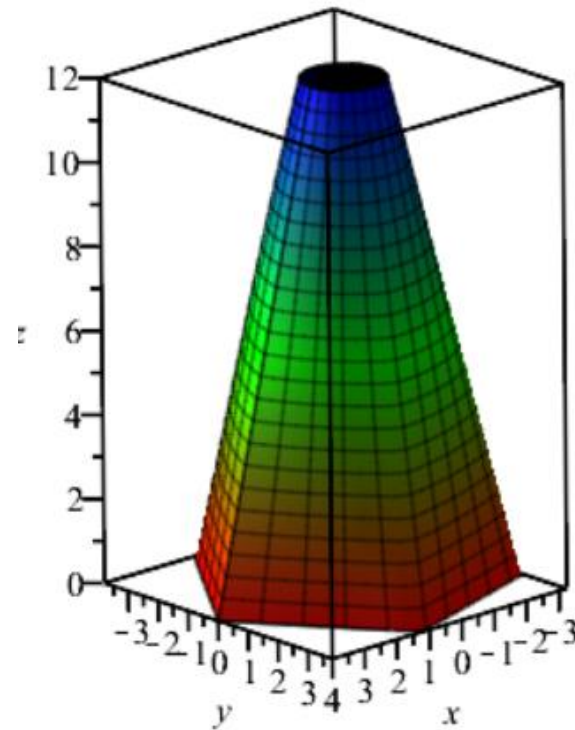
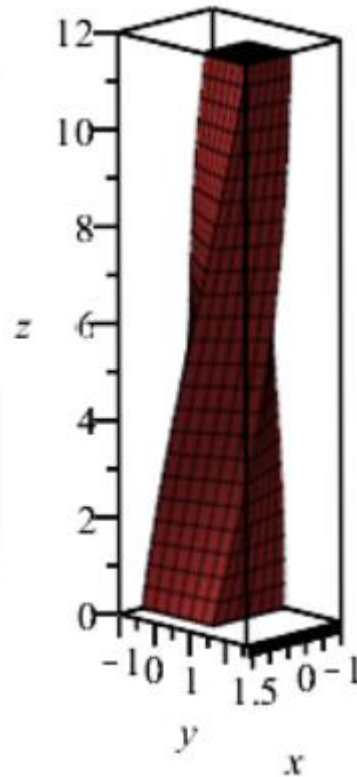
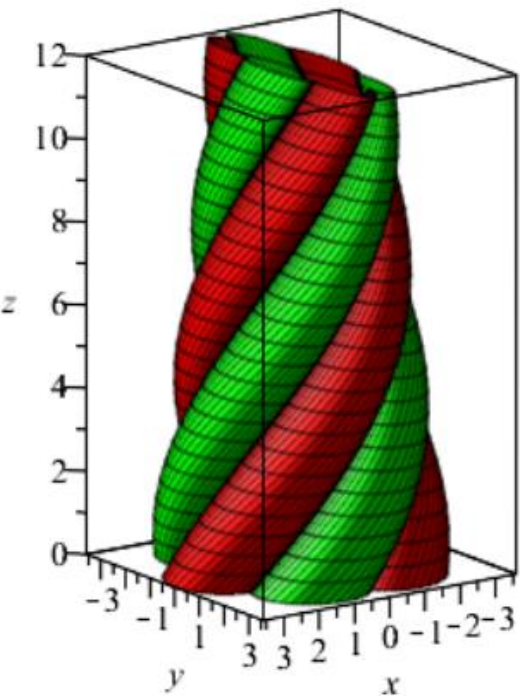
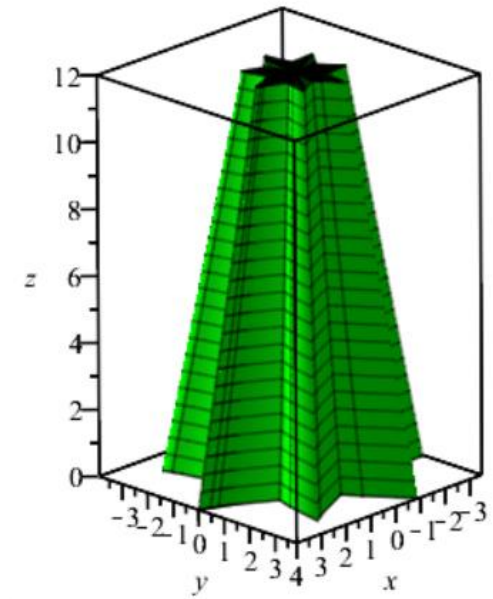


Punkt:



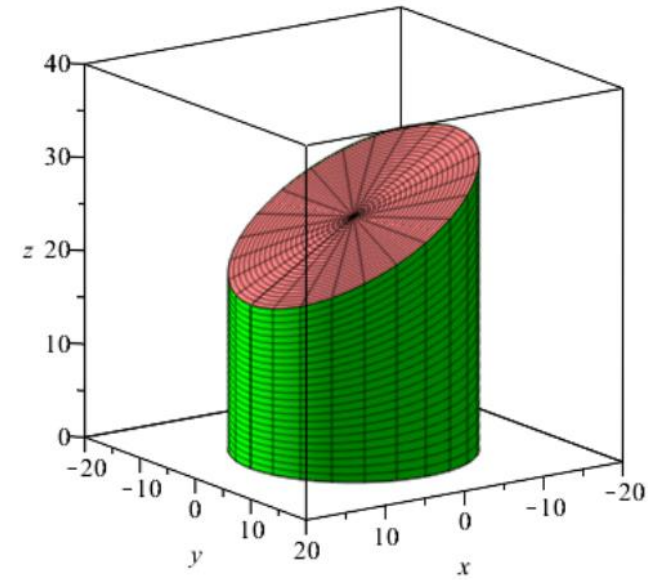
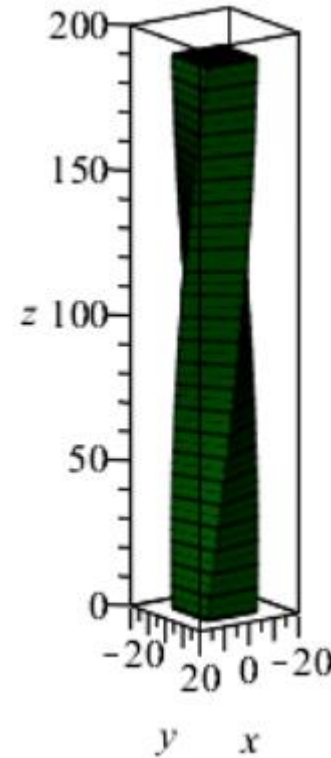
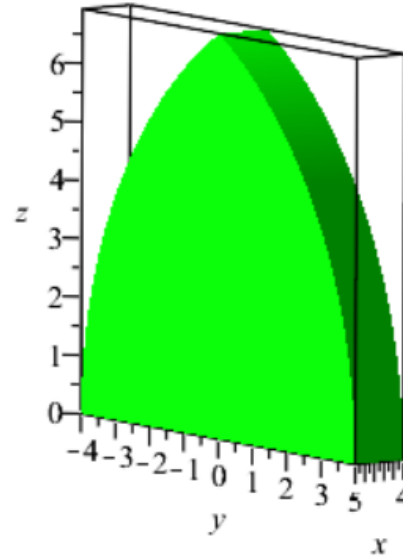
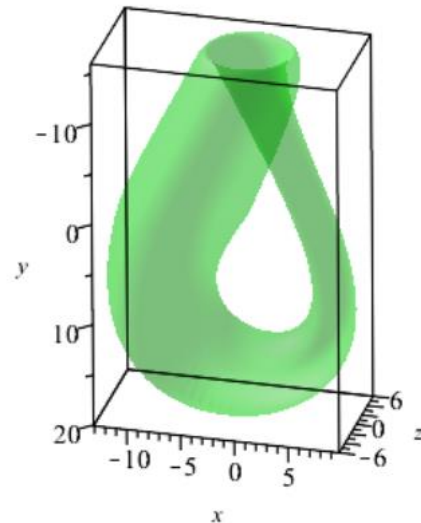
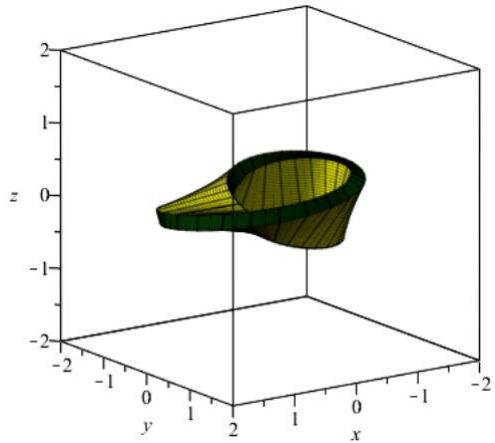
SJOVE TÅRNE

- <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/taarne.htm>



BERØMTE FIGURER OG BYGNINGER

- <https://steen-toft.dk/mat/3d-print/eksempel.htm>



SKOVTÅRNE I UDLANDET

- Rügen, Tyskland (*tæt på Danmark*)
<https://goo.gl/maps/37CJfc6fEJftKpBTA>
- The Treetop Walks of Erlebnis Akademie AG:
Tyskland (3 mere), Slovakiet (1), Slovenien (1), Tjekkiet (1), Østrig (1)
<https://www.baumwipfelpfade.de/en/portal-en/>
- Video:
https://youtu.be/TJQj_ADcPgU

Masser af muligheder for at forsøge sig med modellering af tårne!

Slut. Tak for i dag.