MODELLERING AF SKOVTÅRNET
ADGANGSKURSUSMØDE 2022

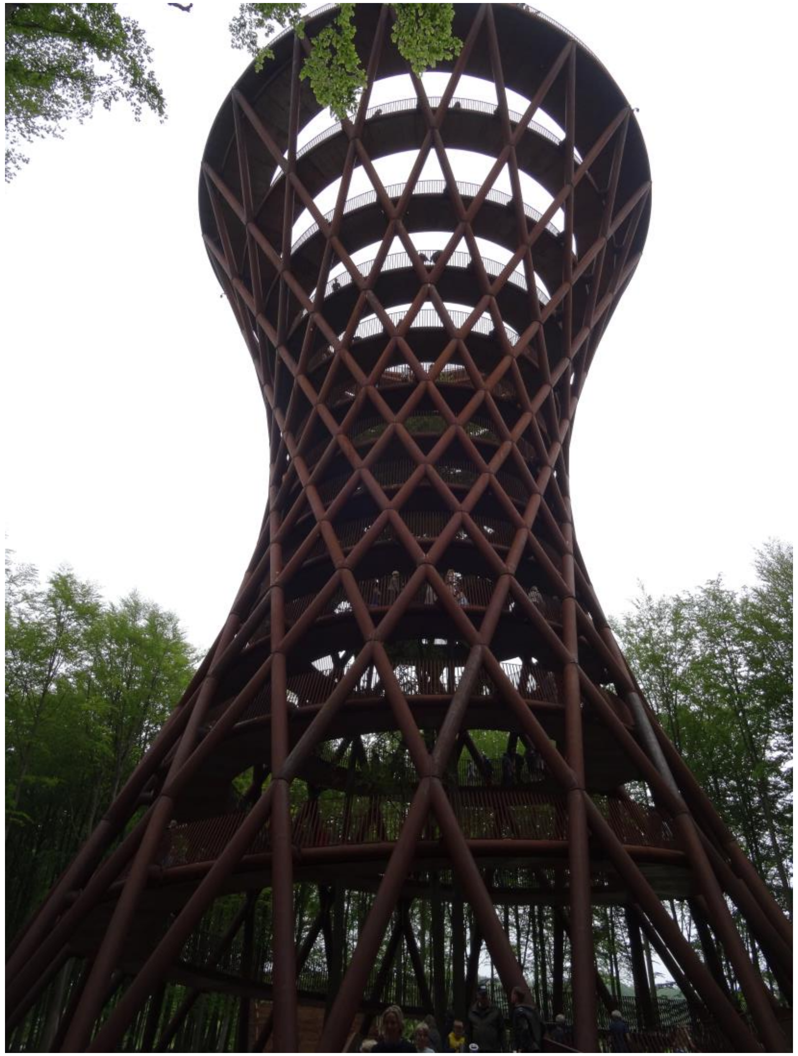
1

Steen Toft Jørgensen

(2009-) ekstern lektor, DTU Compute, Matematik 1

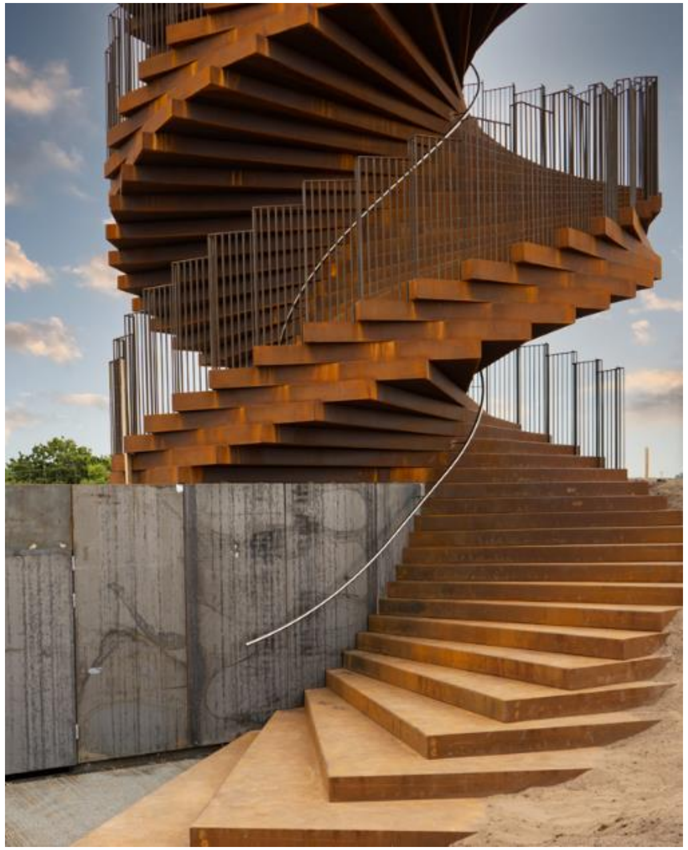
(1979-2018: pædagogisk faglig koordinator, Helsingør Gymnasium)

SKOVTÅRNET PÅ SYDSJÆLLAND (2019)



MARSKTÅRNET I SKÆRBÆK, SØNDERJYLLAND (2021)

- 25 m højt
- 6.2 m i diameter i bunden
- 12.7 m i diameter i toppen
- Materiale: cortenstål
- 136 trin op, 131 trin ned
- Entrépris voksen: 90 DKK
- Stor succes!



https://www.marskcamp.dk/tower

SKOVTÅRNE I UDLANDET

- Rügen, Tyskland (*tæt på Danmark*)
  https://goo.gl/maps/37CJfc6fEJftKpBTA
- The Treetop Walks of Erlebnis Akademie AG:
  Tyskland (3 mere), Slovakiet (1), Slovenien (1), Tjekkiet (1), Østrig (1)
  https://www.baumwipfelpfade.de/en/portal-en/
- Video:
  https://youtu.be/TJQj_ADcPgU

Masser af muligheder for at forsøge sig med modellering af tårne!

FACTS OM SKOVTÅRNET

- Facts modtaget via mailkontakt.
- **Facts:**
  - *Tårnet er 45 m højt.*
  - *Hyperboloiden er 28 m foroven og forneden i diameter,*
    og 14 m i diameter i midten (smalleste sted).
  - *Rampen er 1.8 m bred (er dog bredere ved foden).*
  - *Rampen løber 12 gange rundt.*
    Der er anvendt 7550 stk. brædder til rampen og platformen i toppen.
  - *Stålstængerne består af 18 stk. hver vej (højre om og venstre om).*

MODELLERING

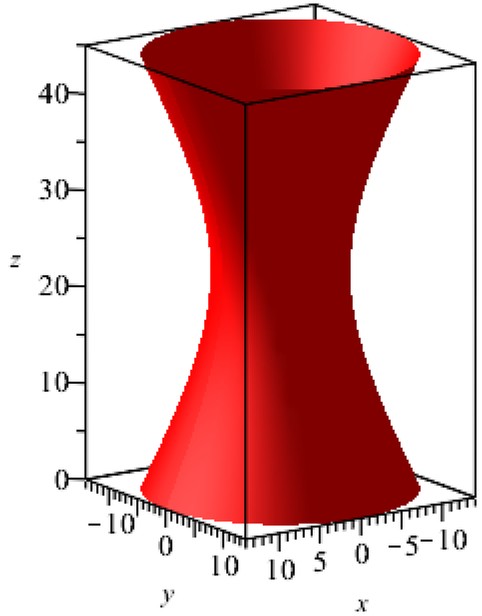
- Cirkulær hyperboloide, dvs. b = a: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Bestemmelse af a og c via punkterne: $(7, 0)$ og $\left(14, \frac{45}{2}\right)$
- Parametrisering af den **krumme overflade** på hyperboloiden:

  https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Parametric_representations

One-surface hyperboloid: $v \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} x &= a\cosh v \cos\theta \\ y &= b\cosh v \sin\theta \\ z &= c\sinh v \end{aligned}$$

MODELLERING



- Nu kan hyperboloidens **overflade** tegnes (skalatro):

$$\left\{a = 7,\ c = \frac{15\sqrt{3}}{2}\right\}$$

- Stålbjælkerne er **rette linjer**, som ligger i overfladen.

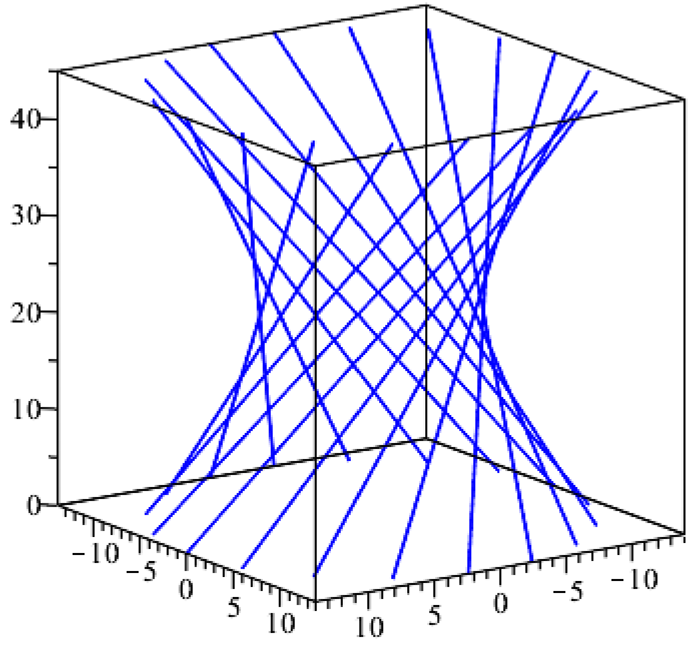
  Parametrisering af linjerne:

  https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Lines_on_the_surface

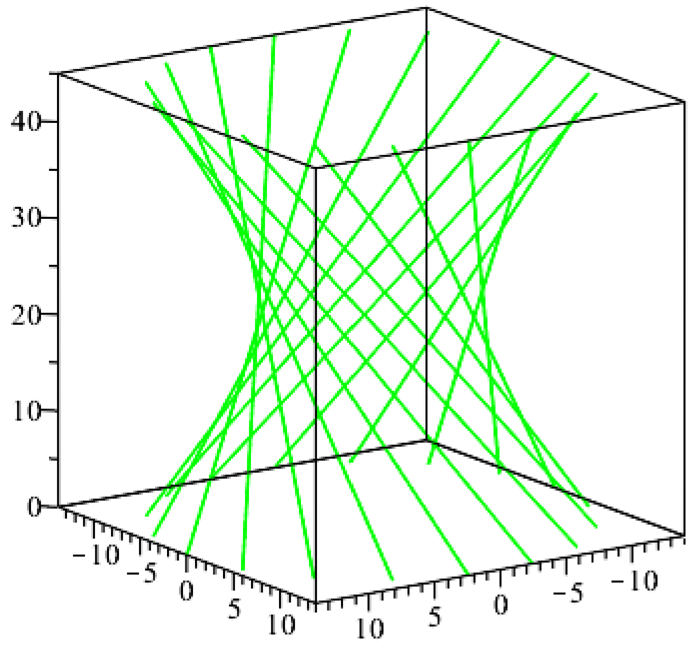
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ b\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ b\cos\alpha \\ \pm c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha \le 2\pi$$

MODELLERING

- Nu kan linjerne tegnes ”højre om”:

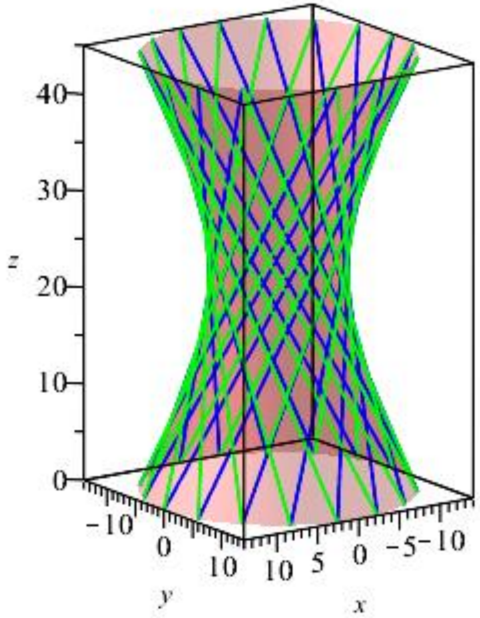


- Og ”venstre om”:

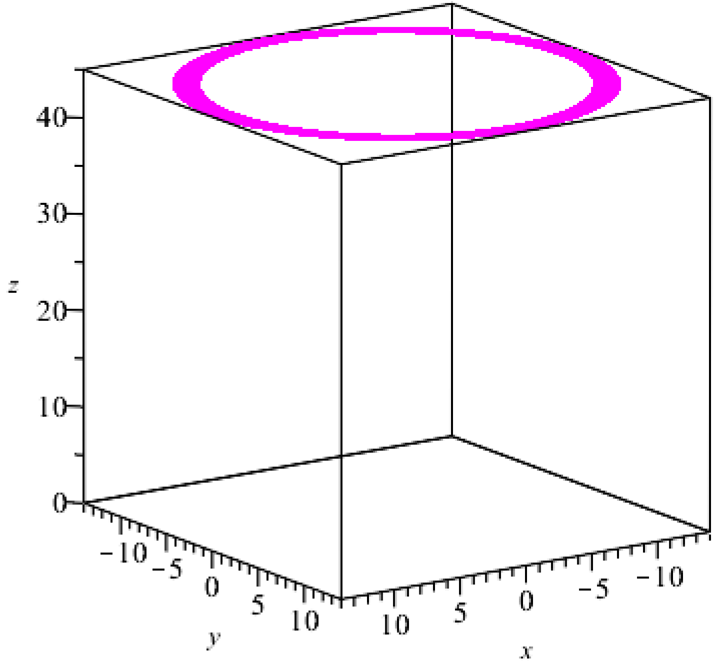


MODELLERING

- Samlet figur (skalatro):



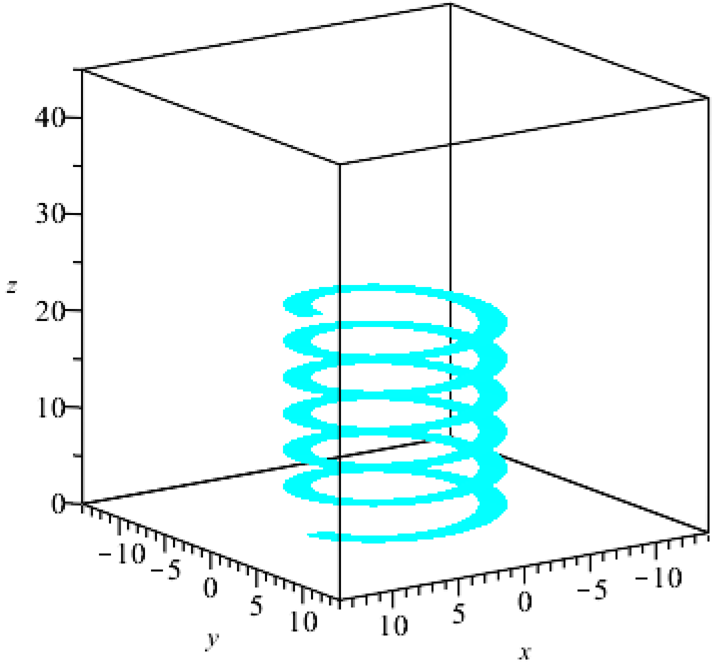
- Platformen i toppen er et cirkelstykke:



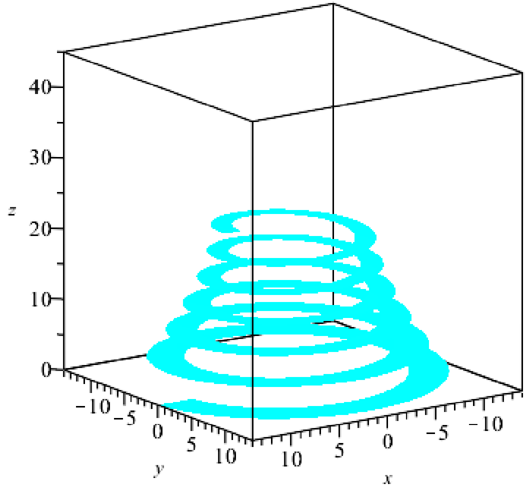
MODELLERING

- Rampen: 6 omgange på **nederste halvdel**:

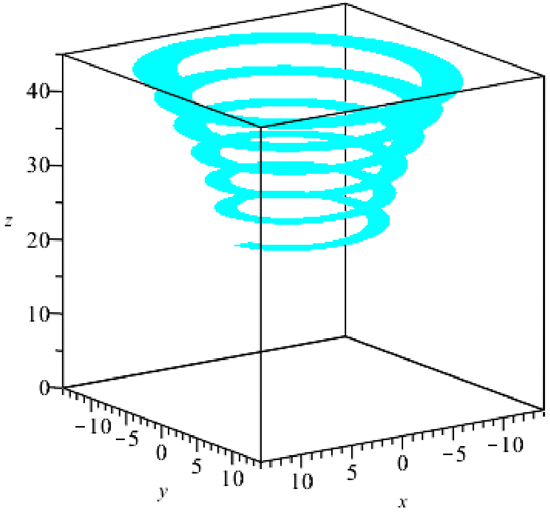
  (her tegnet med konstant radius)



- Rampe tilpasses hyperboloidens bredde på nederste halvdel:

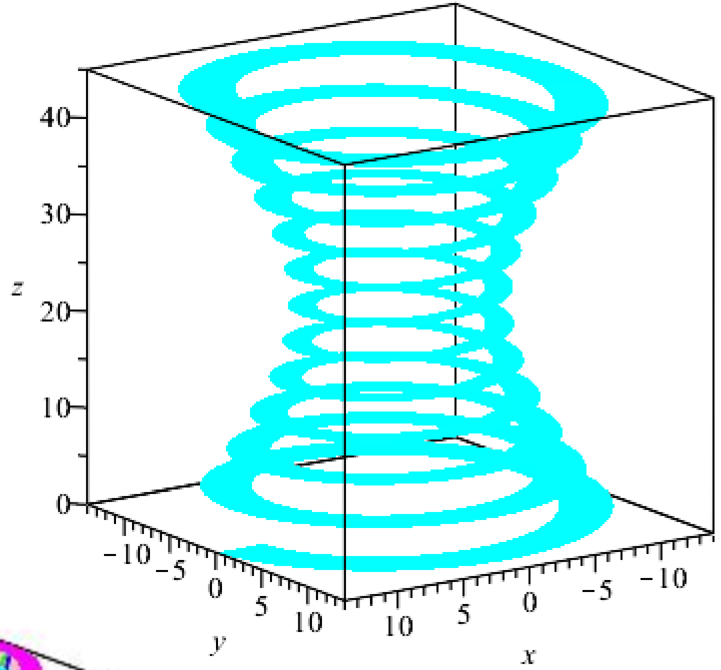


Og speiles på øverste halvdel:

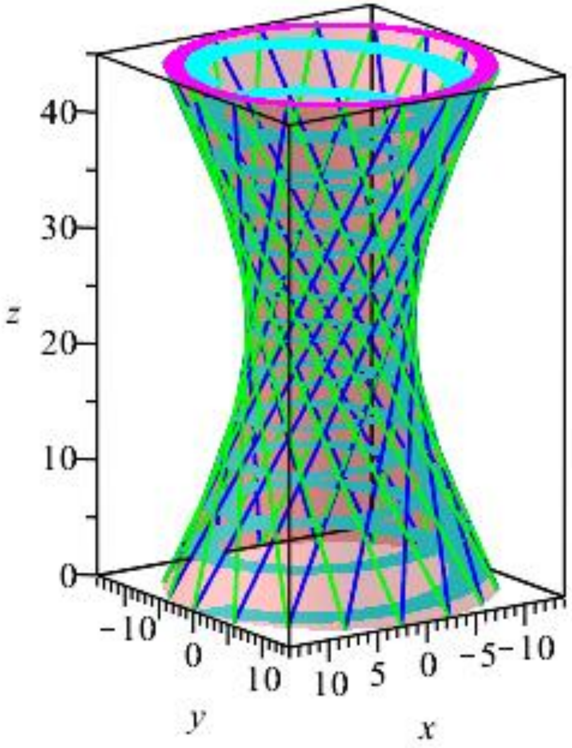


MODELLERING

- Sammensættes til hele rampen (12 omgange):

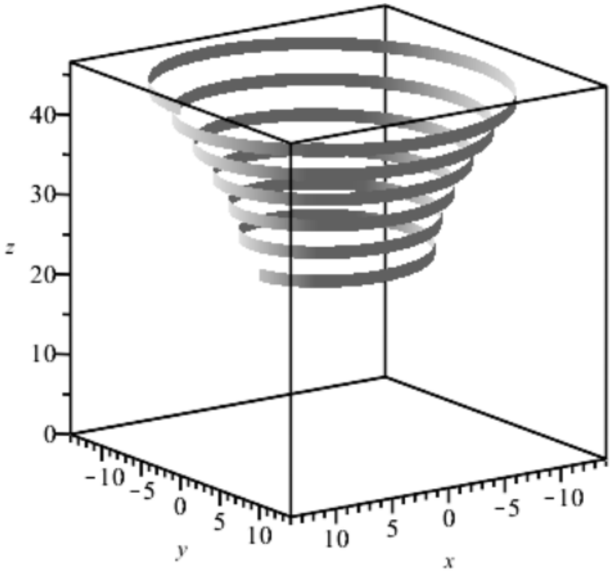


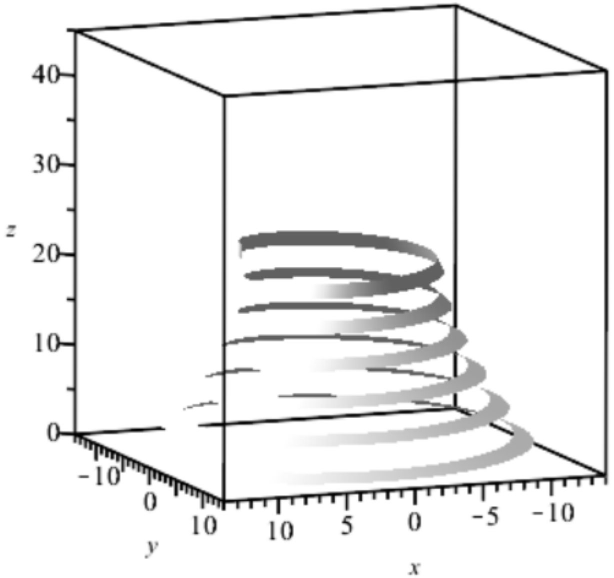
- Samlet model (skalatro)
  - Hyperboloide (transparent)
  - Stålstænger (venstre/højre om)
  - Rampe
  - Platform (foroven)

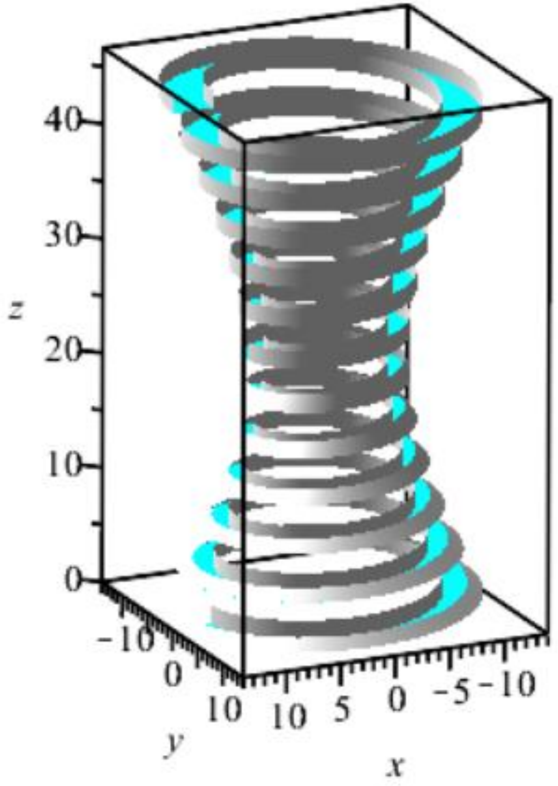


MODELLERING

- **Gelænder/rækværk** inderst og yderst på rampen.
- Lodret inderst.
- Lodret yderst foroven.
- **Men yderst forneden følger det hyperboloidens tangentplaner!**

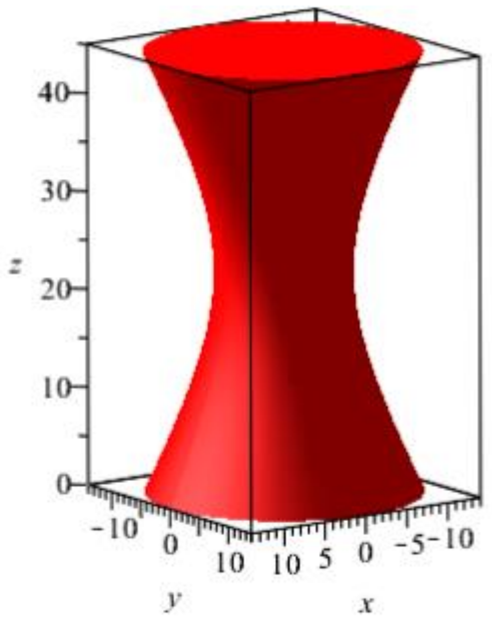


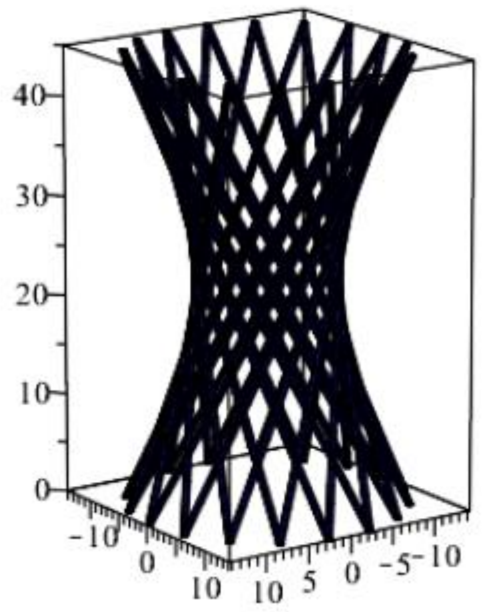


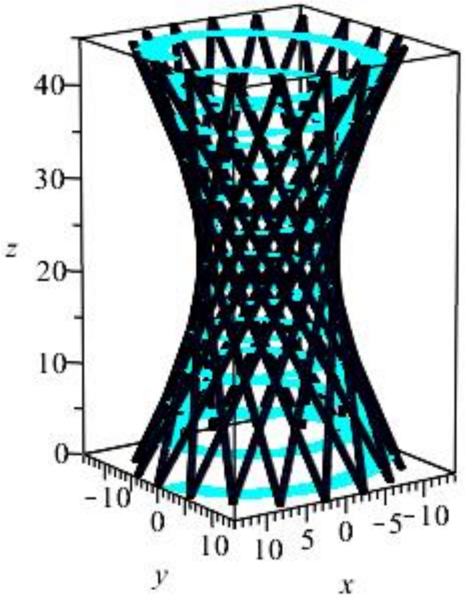


3D-FIGUR TIL VISNING

Maple kan generere 3D-figur (*STL-format*), som kan vises i ”3D Builder” på Windows 10.







3D-FIGUR TIL VISNING

- I Maple genereres en rummelige figur via parametriseringer.
- Evt. sammenstykkes figurer af flere dele via *"display"* i Maple.
- 3D-figurer i Maple navngives.

Hyperboloidens overflade:

$$pH := plot3d\left(r(v, \theta) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, v = -v_{max} .. v_{max}, \theta = 0 .. 2 \cdot \pi, color = red, style = patchnogrid, labels = [x, y, z], scaling = constrained\right)$$

Top og bund:

$$r_{topbund}(u, v) := \langle u \cdot 2 \cdot a \cdot \cos(v), u \cdot 2 \cdot a \cdot \sin(v), 0 \rangle :$$

$$pTOP := plot3d\left(r_{topbund}(u, v) + \langle 0, 0, 45 \rangle, u = 0 .. 1, v = 0 .. 2 \cdot \pi, color = red, style = patchnogrid, labels = [x, y, z], scaling = constrained\right) :$$

$$pBUND := plot3d\left(r_{topbund}(u, v), u = 0 .. 1, v = 0 .. 2 \cdot \pi, color = red, style = patchnogrid, labels = [x, y, z], scaling = constrained\right) :$$

$$hyperbol := display(pH, pTOP, pBUND)$$

3D-FIGUR TIL VISNING

- Konverteres til en STL-fil.

Fremstilling af STL-filen "hyperbol.stl":
Export("hyperbol.stl", *hyperbol*, *base* = *homedir*) = 691284

NB: Filen ligger i brugerens mappe i Windows (f.eks. "C:\Users\Steen").

- En STL-fil er defineret via orienterede trekanter:

KRAV til STL-filen:
* *hver trekant skal have 2 hjørner fælles med hver nabotrekant*
* *hjørnerne i hver trekant er orienteret imod uret, og normalvektoren til hver trekant skal være uadgående (danner en højreskrue)*
* *hjørnerne skal alle have positive koordinater*

NB: positive koordinater er ikke nødvendige her!

- I ASCII-format:
(kan skrives i Notesblok på Windows 10)

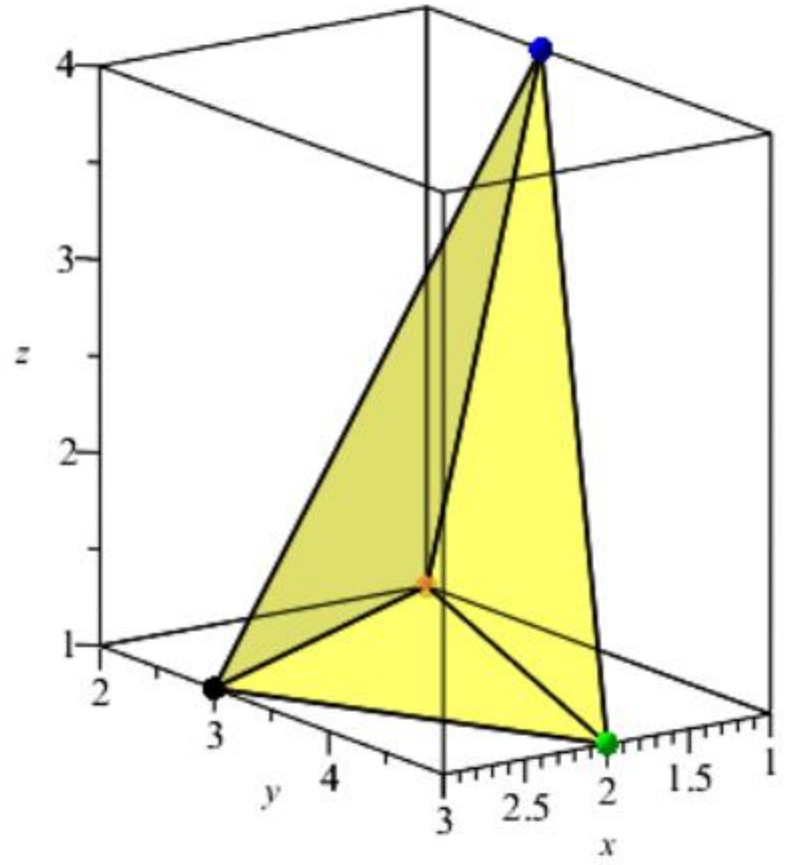
```
solid name
    facet normal ni nj nk
        outer loop
            vertex v1x v1y v1z
            vertex v2x v2y v2z
            vertex v3x v3y v3z
        endloop
    endfacet
endsolid name
```

```
solid tetraeder

    facet normal 0 0 -5
        outer loop
            vertex 1 2 1
            vertex 2 5 1
            vertex 3 3 1
        endloop
    endfacet

    facet normal 6 3 4
        outer loop
            vertex 3 3 1
            vertex 2 5 1
            vertex 1 3 4
        endloop
    endfacet

    facet normal -9 3 -1
        outer loop
            vertex 2 5 1
            vertex 1 2 1
            vertex 1 3 4
        endloop
    endfacet

    facet normal 3 -6 2
        outer loop
            vertex 1 2 1
            vertex 3 3 1
            vertex 1 3 4
        endloop
    endfacet

endsolid tetraeder
```

STL-FIL MED HÅNDSKRIVNING

- https://steen-toft.dk/mat/3d-print/opgaver.htm

- Håndregning på skævt tetraeder: https://steen-toft.dk/mat/3d-print/tetra/tetra2.pdf



3D-FIGUR TIL VISNING

- STL-fil åbnes på Windows 10 med det indbyggede program:
  - ”3D viser”
  - ”3D Builder”
- Her kan man rotere og zoome på objektet.
- STL-filen kan printes i plastik på en **3D-printer**!

BEREGNINGER

- **De rette linjer (stålbjælker) ligger helt på hyperboloidens overflade?**
  Bevis: indsætter parametriseringen af linjerne i hyperboloidens ligning.

- **Længden af en stålbjælke (ret linje)?**
  Længden beregnes til ca. 51.1 m. Til sammenligning er tårnet 45 m højt.

- **Drejningsvinklen af en stålbjælke (ret linje)?**
  Drejningsvinklen er præcis 120°, dvs. præcist 1/3 omgang.

- **Overfladearealet af hyperboloiden?**
  Hyperboloidens krumme overflade beregnes til ca. 2903 m^2.
  Bund- og topcirklen har hvert et areal på ca. 616 m^2.
  Samlet overfladeareal er ca. 4134 m^2.

BEREGNINGER

- **Rumfanget af hyperboloiden?**
  Rumfanget beregnes til ca. $13854\ m^3$.

- **Længden af rampen langs yderkanten?**
  Længden langs yderkanten beregnes til ca. 730 m.

- **Længden af rampen langs inderkanten?**
  Længden langs inderkanten beregnes til ca. 543 m.

- **Arealet af rampen?**
  Arealet af rampen beregnes til ca. $1660\ m^2$.

METODERNE

- **Parametriseringer** findes på WikiPedia.
  Wikipedia rummer utrolig meget matematik!

- **Plot-metoder** læres på Matematik 1 kurset på DTU.
  Kurset er obligatorisk på 1. år for civilingeniør-studerende.

- **Beregnings-metoder** for længder, arealer, rumfang mm.
  Læres på Matematik 1 kurset på DTU.
  NB: der anvendes altid parametriseringer af kurver, flader og rumlige områder.
  Formler til beregning, når man har en parametrisering:
  https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop/present/integral.pdf

LINKS TIL SELVSTUDIE

- Om **Skovtårnet** (modellering, links til presseomtale og opgaver til gymnasiebrug): https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop.htm

- Mere generelt om **3D-print, 3D-geometri & 3D-arkitektur**: https://steen-toft.dk/mat/3d-print/
  - For dataloger:
    - **STL-format til 3D** (generering af STL-fil ud fra Maple-figur & håndskrivning af STL-fil for simple figurer).
  - For matematikere:
    - **Grundlæggende geometriske konstruktioner** (rotation, skalering, translation, spejling).
    - **Sjove tårne** med forskellig egenskaber.
  - For alle:
    - **Kendte matematiske objekter** (f.eks. torus, oktaeder).
    - **Berømte bygninger** (f.eks. turning torso i Malmø, operaen i Beijing).

GRUNDLÆGGENDE GEOMETRISKE KONSTRUKTIONER

- **Rotation, skalering, translation, spejling:**

  Kan alle udføres ved brug af vektorer og matricer i 3D.

  https://steen-toft.dk/mat/3d-print/geometri.htm

ROTATION OM AKSE

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Rotationsakse på x-aksen, y-aksen eller z-aksen:**

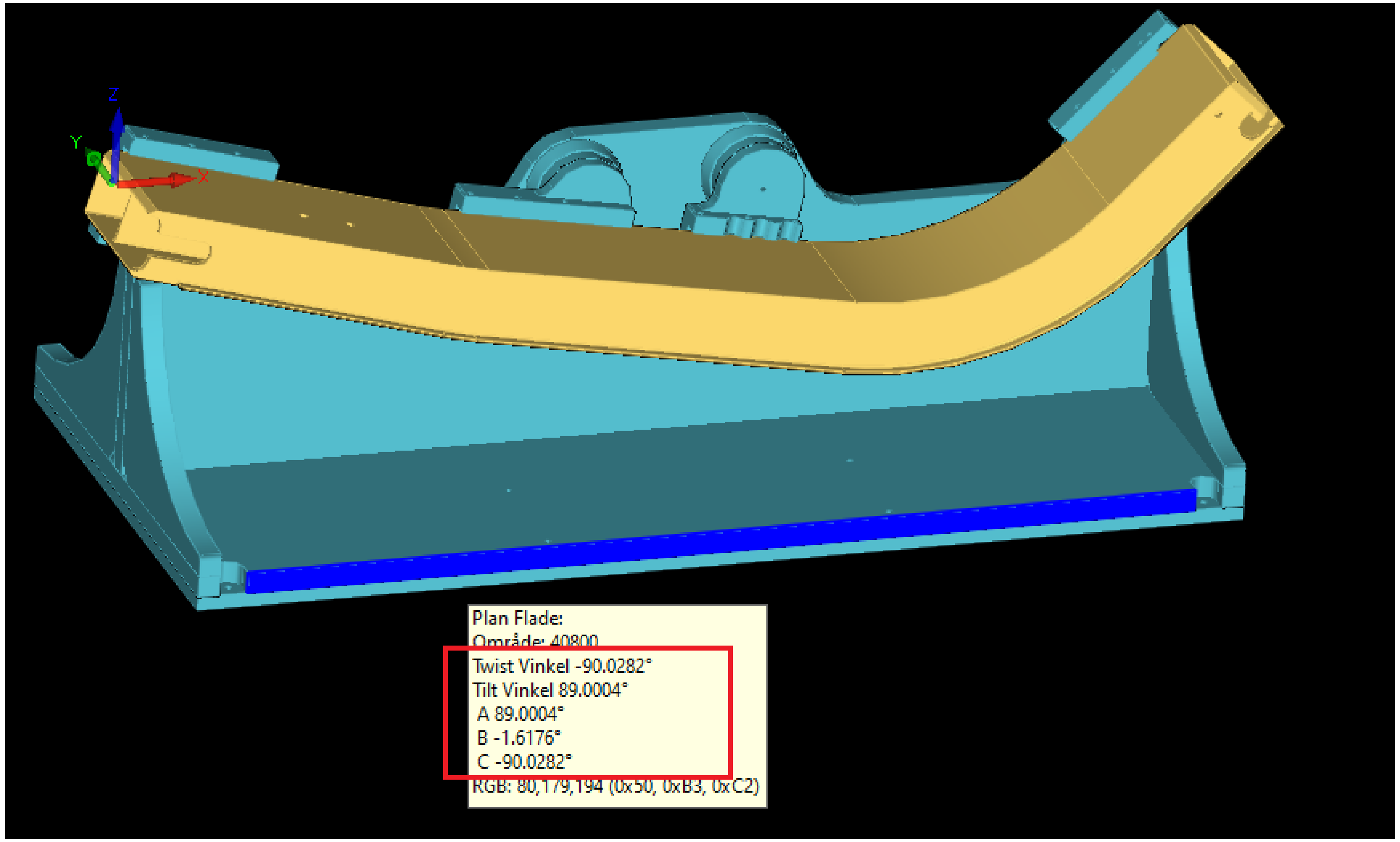
  https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#In_three_dimensions

- **Vilkårlig rotationsakse (metode):**
  (1) Parallelforskyd rotationsaksen, så den går gennem origo,
  (2) roter så rotationsaksen følger en af koordinatsystemets akser,
  (3) roter figuren den ønskede vinkel,
  (4) inverter (2)
  (5) inverter (1)

  Indbygget funktion *RotationMatrix* i Maple:
  https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Student/LinearAlgebra/RotationMatrix&term=RotationMatrix

ROTATION OM AKSE (ANVENDT EKSEMPEL)

- Fik en henvendelse på LinkedIn fra et enmandsfirma, som laver CNC fræsning. Havde via goggling fundet mit website om rotation om en vilkårlig akse i 3D.
- Svært at kommunikere, da manden er faglært, og ikke kendte til dybere matematik.
- Han ville så købe Maple, men det frarådede jeg. Han arbejdede normalt i Excel. Så jeg lavede en løsning i Maple, og implementerede den i **Excel**.



Konkret metode

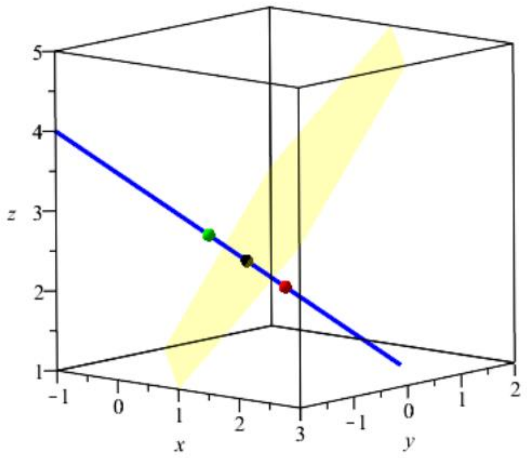
1. forskyd med $-P_0$
2. rotere om x-aksen med vinklen 0 (udgår)
3. rotere om y-aksen med vinklen **-88.38235834**
4. rotere den ønskede vinkel om z-aksen, **f.eks. 1 grad**
5. rotere tilbage om y-aksen med vinklen **88.38235834**
6. rotere tilbage om x-aksen med vinklen 0 (udgår)
7. forskyd med P_0

SPEJLING I PUNKT, LINJE ELLER PLAN.

- **Plan:**

Metode

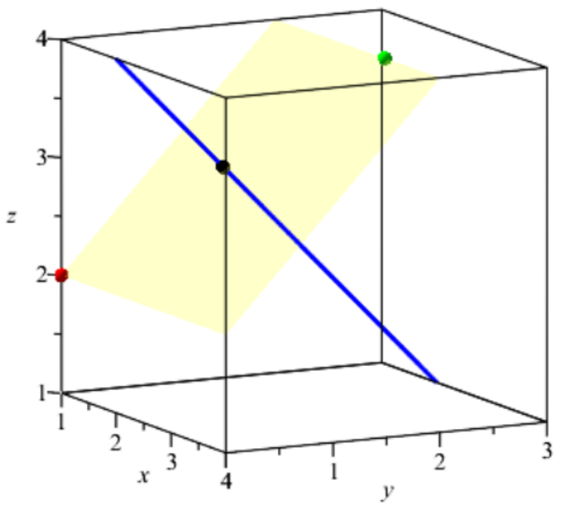
Danner en linje l gennem punktet P vinkelret på plan α.
Retningsvektoren for linje l er normalvektoren for plan α.
Beregner skæringspunktet S mellem linje l og plan α.
Derefter kan P spejles i S, og spejlpunktet P_α er fundet.



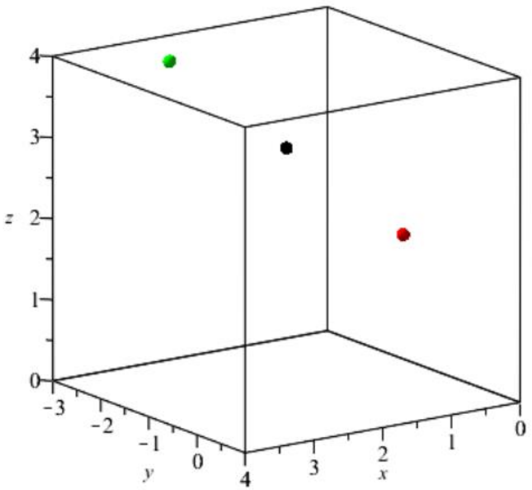
- **Linje:**

Metode

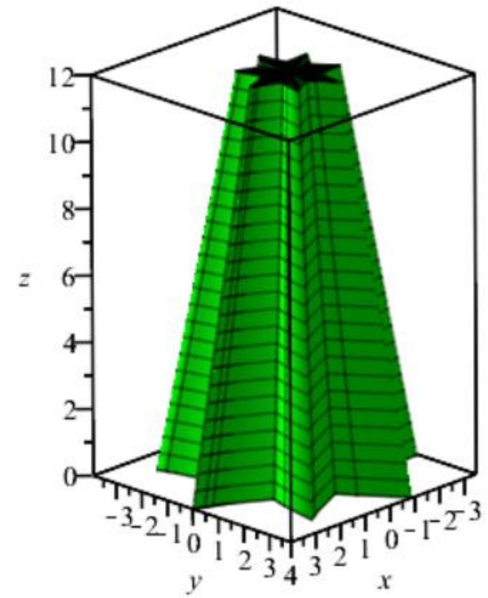
Danner et plan α gennem punktet P vinkelret på linjen l.
Normalvektor for planen α er retningsvektoren for linjen l.
Beregner skæringspunktet S mellem plan α og linje l.
Derefter kan P spejles i S, og spejlpunktet P_l er fundet.



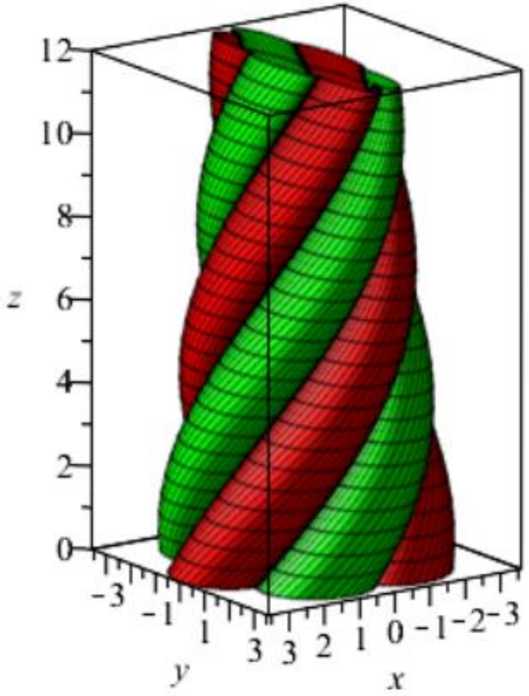
- **Punkt:**

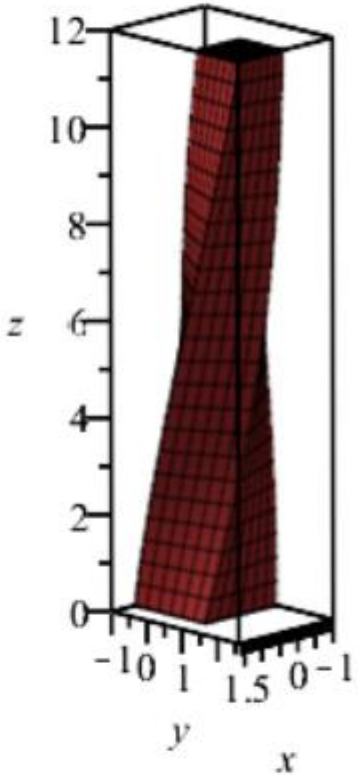


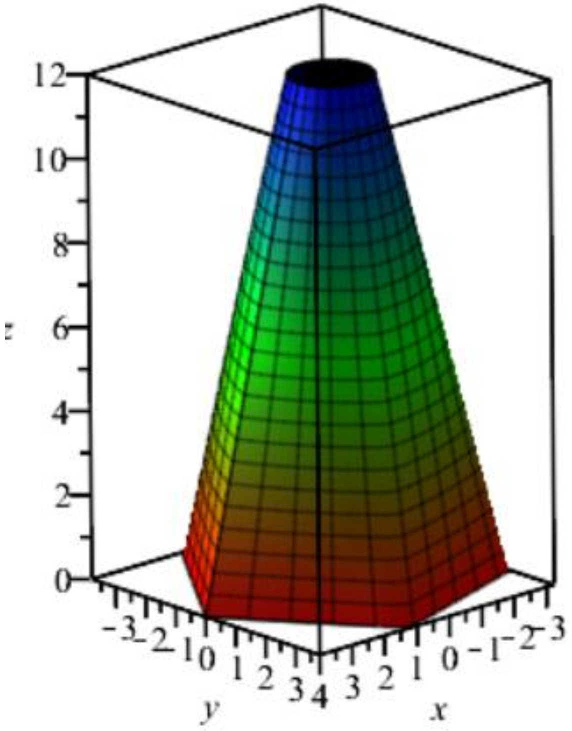
SJOVE TÅRNE

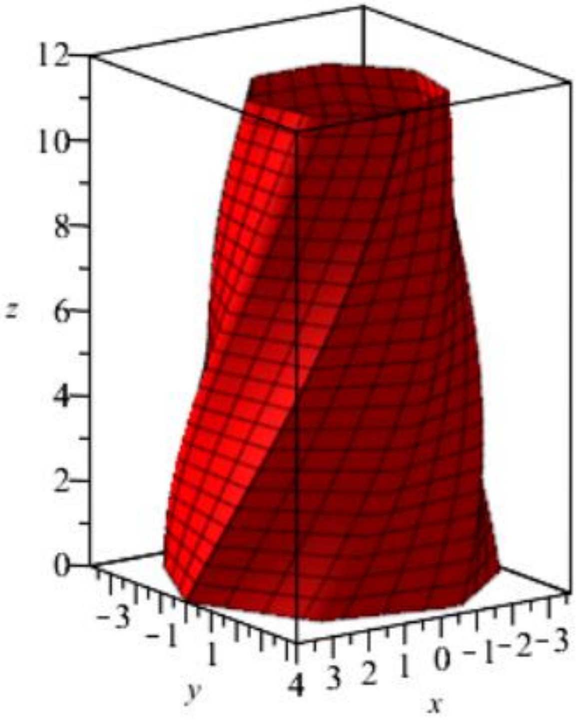


- https://steen-toft.dk/mat/3d-print/taarne.htm



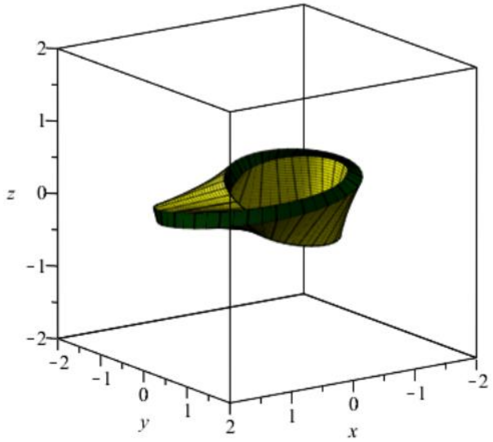


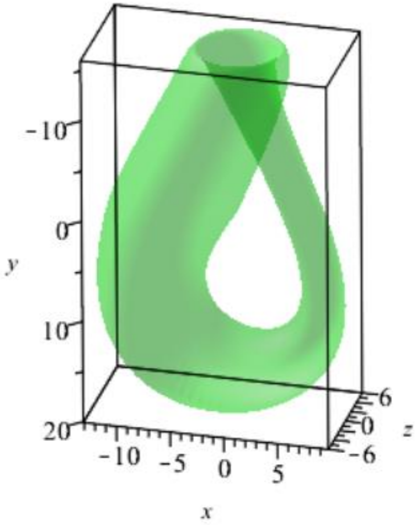


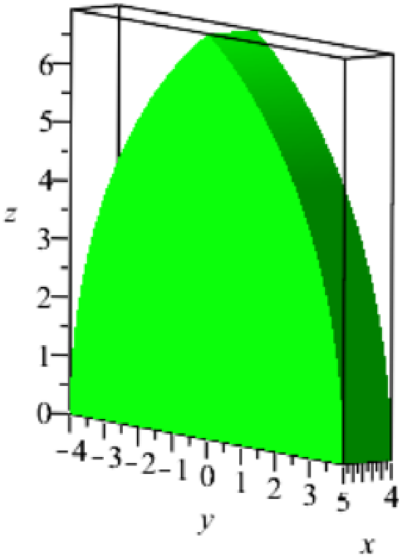


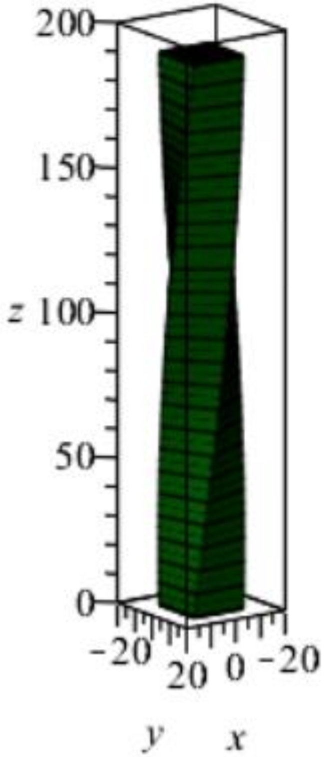
BERØMTE FIGURER OG BYGNINGER

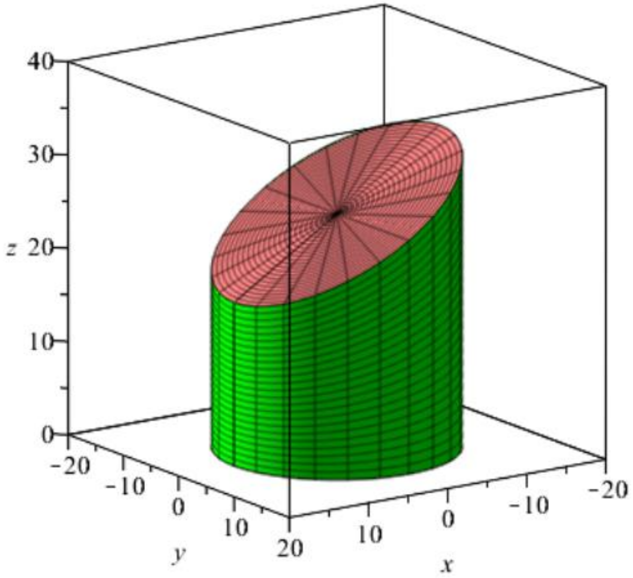
- https://steen-toft.dk/mat/3d-print/eksempel.htm











OPGAVER TIL DELTAGERNE

- **Opgaver med tilhørende løsning:** https://steen-toft.dk/mat/3d-print/treetop.htm#geogebra

- **Tegning af hyperbel (2D) og hyperboloide (3D) i GeoGebra:**
  - Opgave 1-4.
  - Opgave 5-9 (inkl. simpelt bevis for længden af en spiral).

- **Beregninger på hyperbel (2D) og hyperboloide (3D):**
  - Opgave 10-12.