

# Differentiabilitet af vektorfunktion

Man kan ikke se på 2D-banekurve for en vektorfunktion  $f(t)=(x(t),y(t))$  om den er differentiabel.

**NB:** Man skal undersøge om hver af koordinatfunktionerne  $x(t)$  og  $y(t)$  er differentiabel.

## Eksempel på en differentiabel vektorfunktion af 2 variable

> *restart; with(plots) :*

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ t^2 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

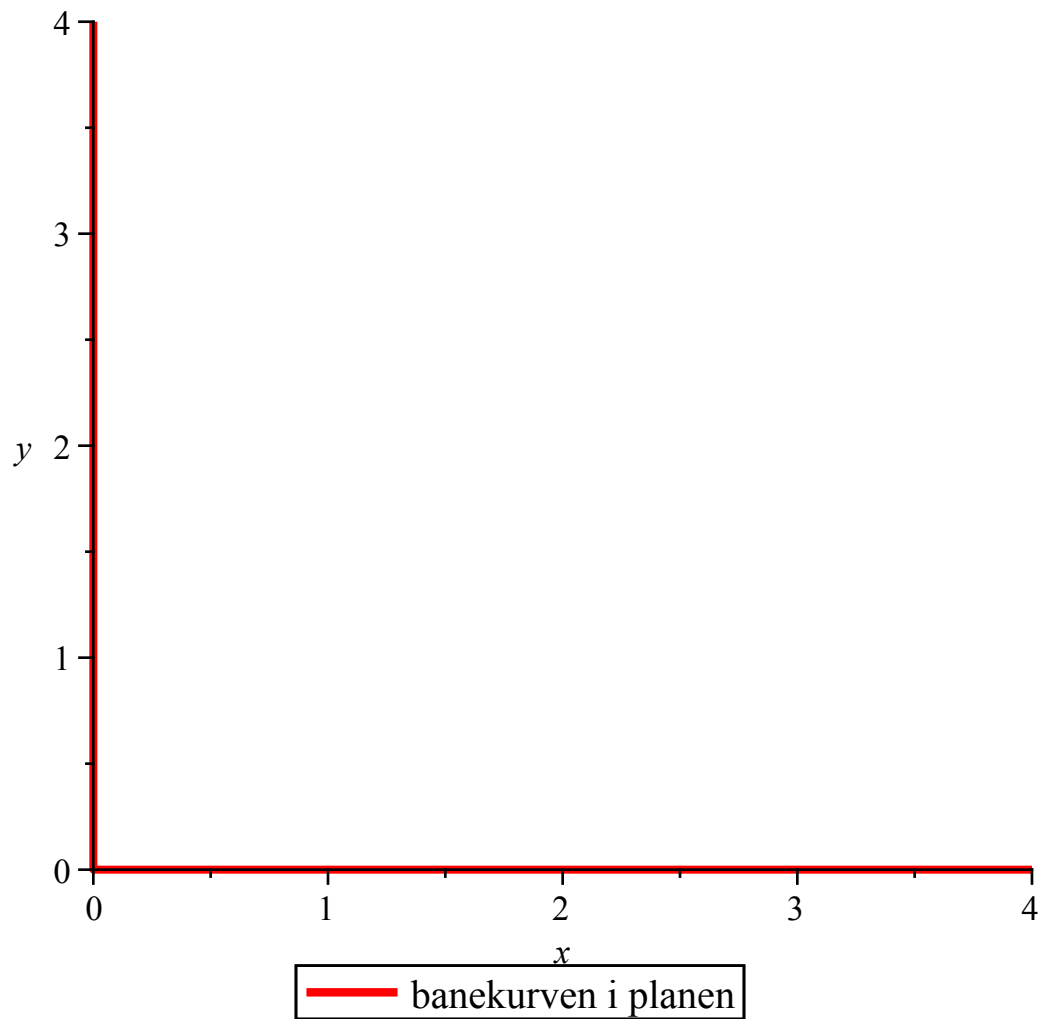
>  $x := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, t^2, t \leq 0, 0);$   
 $x := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, t^2, t \leq 0, 0)$  (1.1)

>  $y := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, 0, t \leq 0, t^2);$   
 $y := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, 0, t \leq 0, t^2)$  (1.2)

**Banekurven i planen knækker  $90^\circ$  i  $(0,0)$ :**

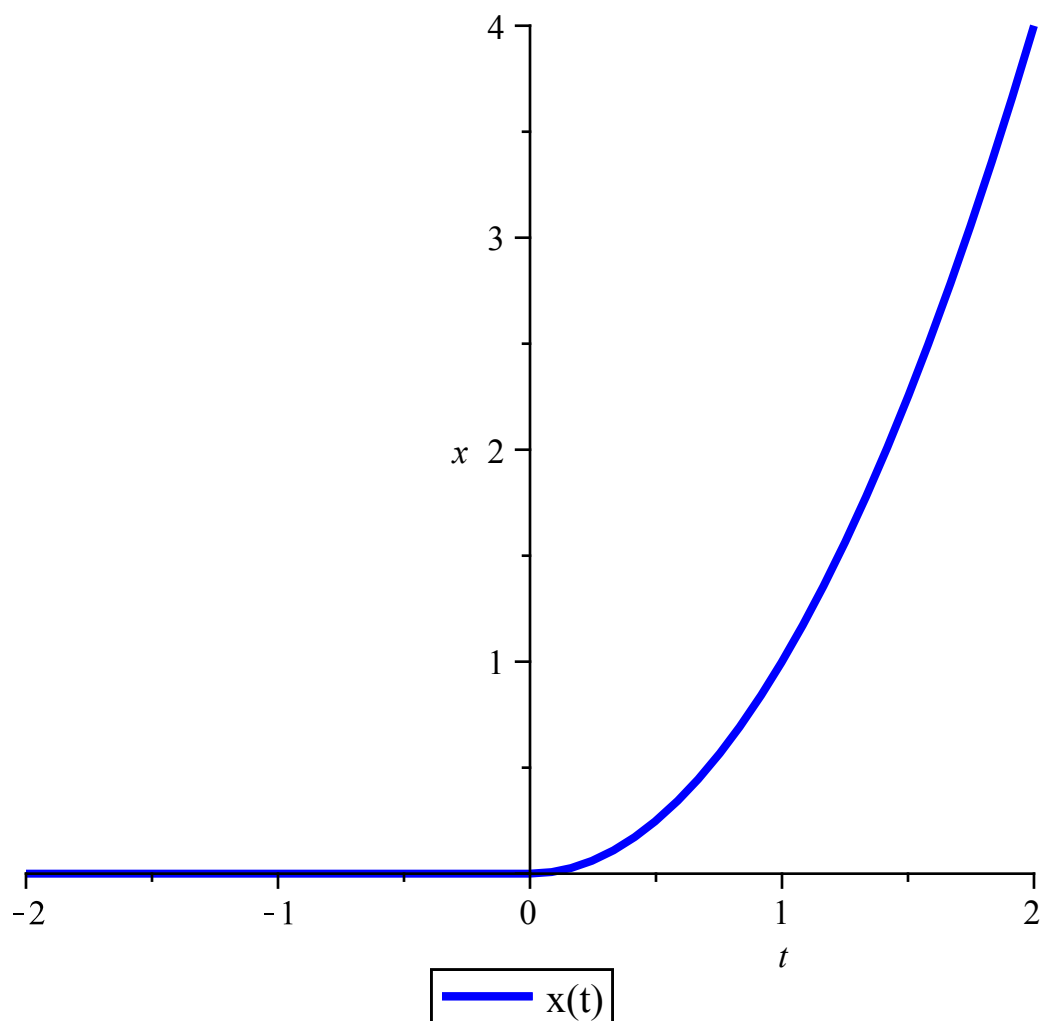
**NB:** Her er kun 2 kordinater: x og y.

>  $\text{plot}([x(t), y(t), t=-2..2], \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3, \text{labels} = [x, y], \text{legend} = ["\text{banekurven i planen}"]);$

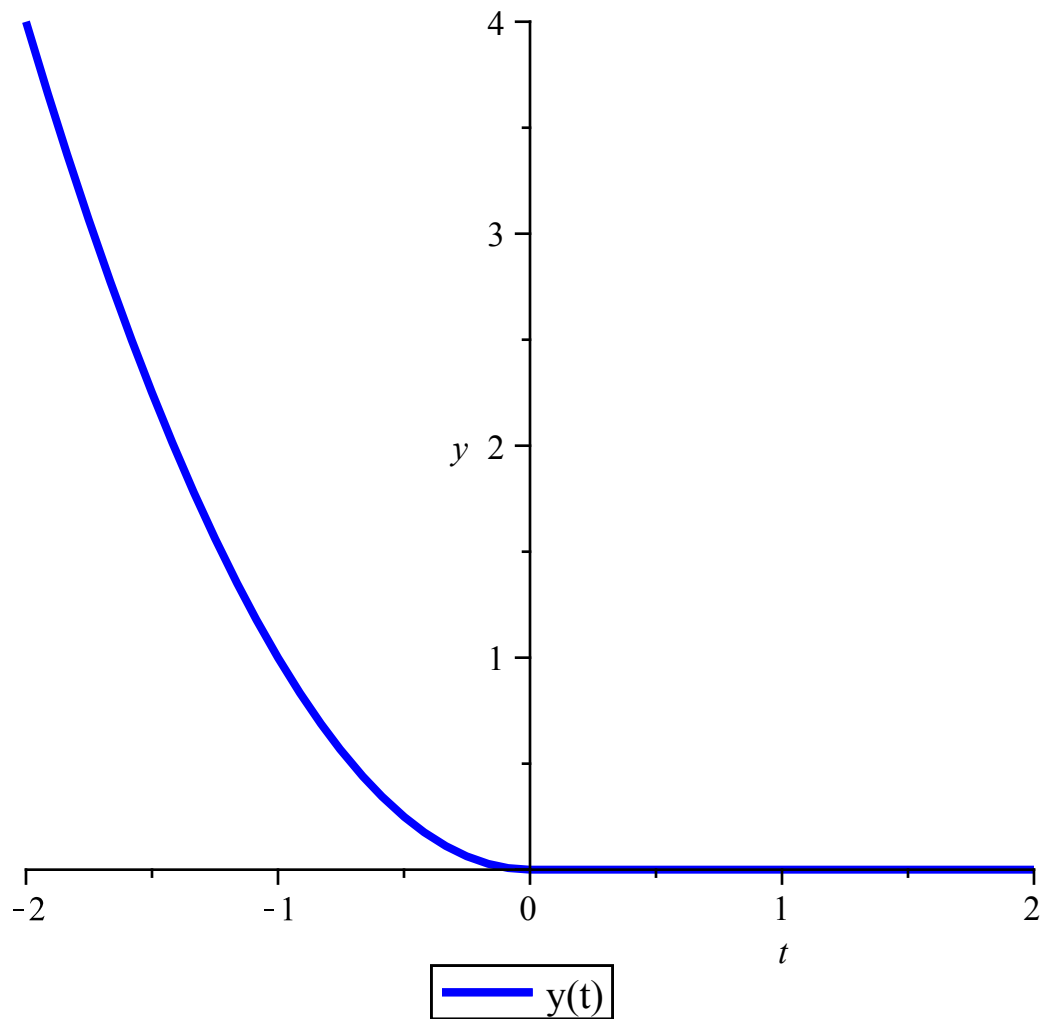


**Men** funktionen  $f(t)=(x(t),y(t))$  er en differentiabel funktion, da **koordinatfunktionerne**  $x(t)$  og  $y(t)$  er differentiable:

> `plot(x(t), t=-2 ..2, color = blue, thickness = 3, labels = [t, x], legend = ["x(t)"]);`



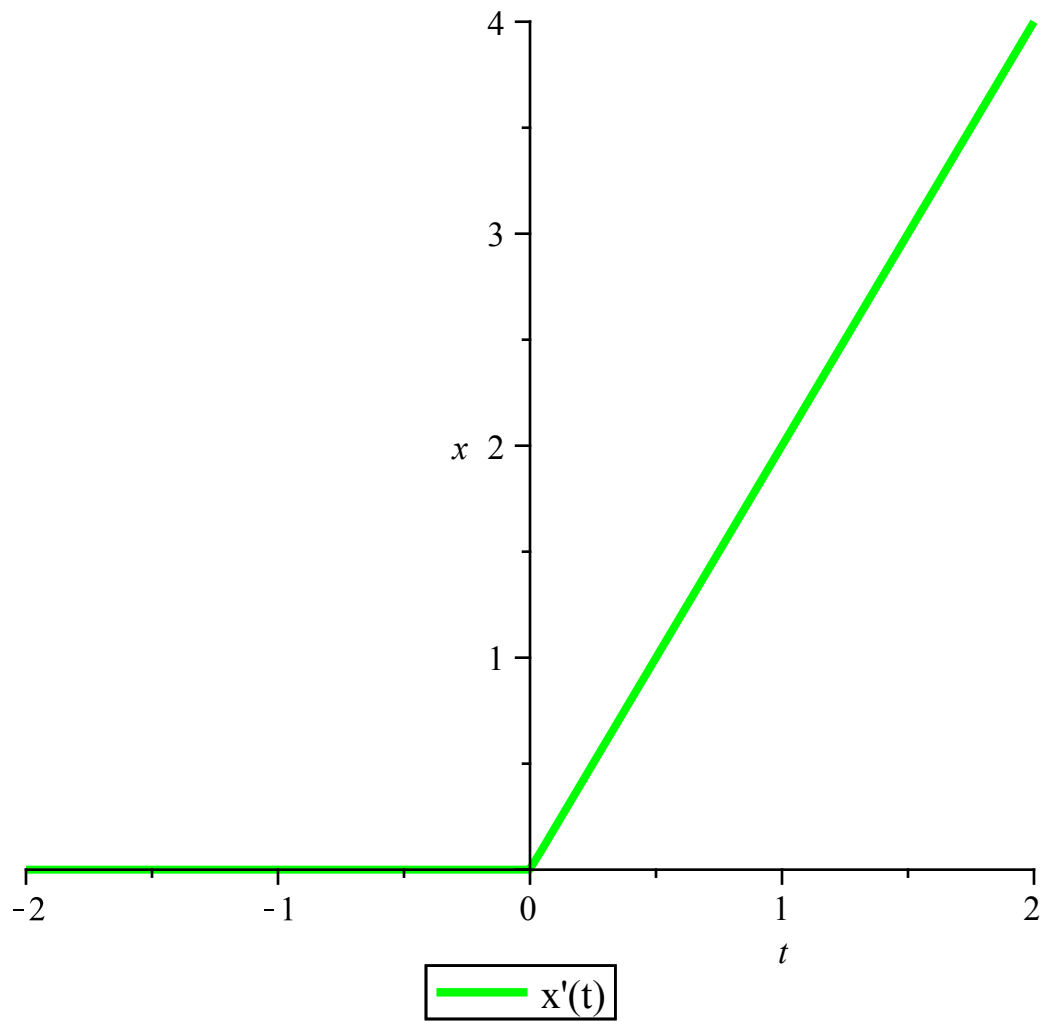
```
> plot(y(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"]);
```



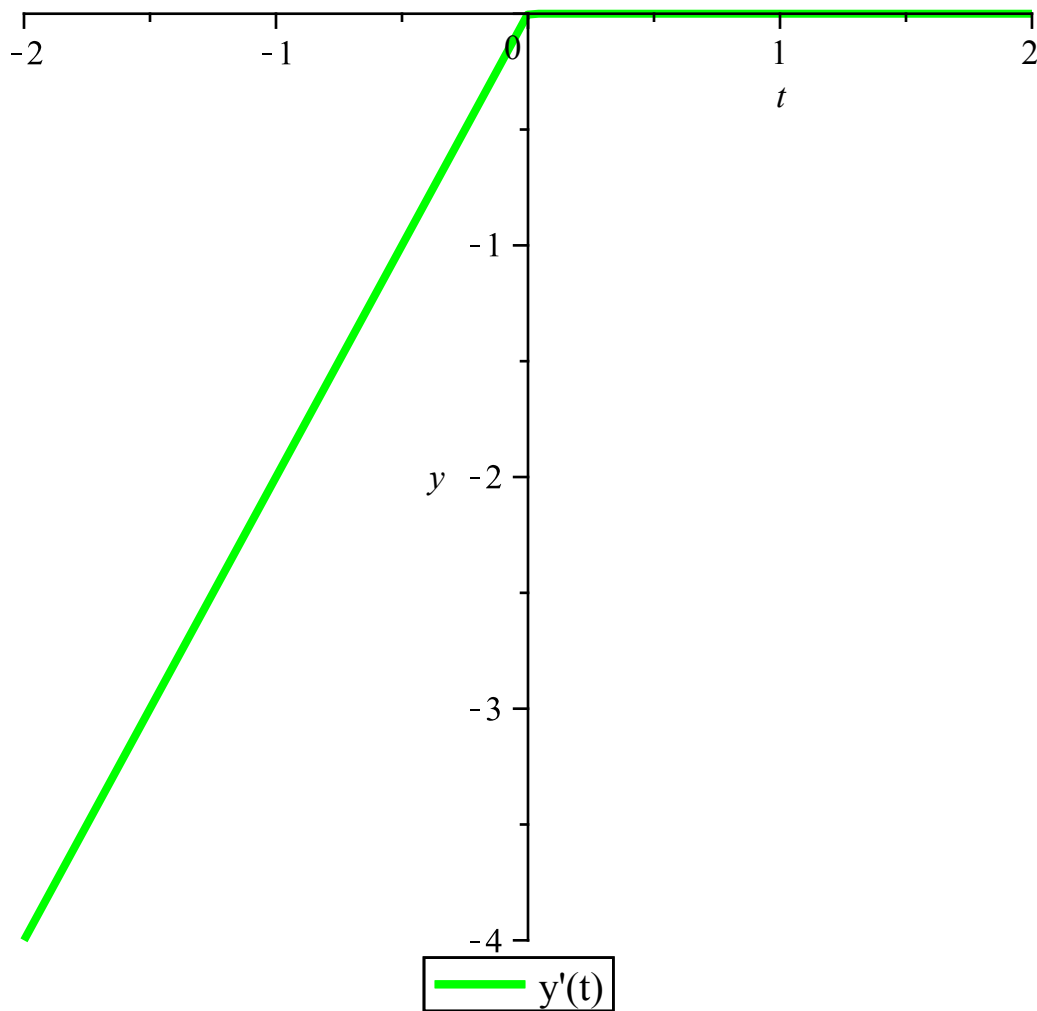
Koordinatfunktionernes afledede  $x'(t)$  og  $y'(t)$  er **kontinuerte** funktioner af  $t$ :

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ 2t & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

> `plot(x'(t), t=-2..2, color=green, thickness=3, legend=["x'(t)"], labels=[t, x]);`



```
> plot(y'(t), t=-2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["y'(t)"], labels = [t, y]);
```



**Banekurven i rummet er differentiabel:**

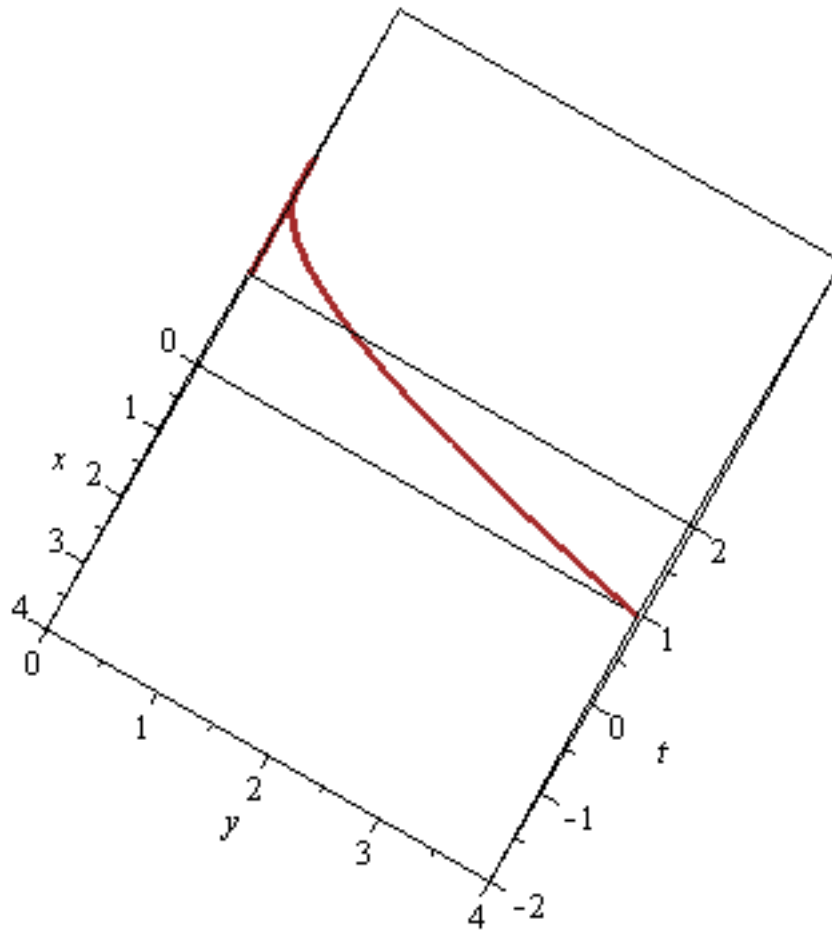
**NB:** Her er 3 kordinater:  $t$ ,  $x$  og  $y$ .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen er simpelthen glat - også i  $t = 0$ .)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så  $t$ -aksen går ud af skærmen samt  $x$ -aksen til højre og  $y$ -aksen opad. Så fremkommer banekurven i  $x$ - $y$ -planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x, y, t]);`

$t = 0$ .



### ▼ Eksempel på en ikke-differentiabel vektorfunktion af 2 variable

`> restart; with(plots) :`

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

`> x := t -> piecewise(t < 0, 1/2 * t, t >= 0, 2 * t);`

$$x := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t < 0, \frac{1}{2} t, 0 \leq t, 2 t\right) \quad (2.1)$$

`> y := t -> piecewise(t < 0, 1/2 * t, t >= 0, 2 * t);`

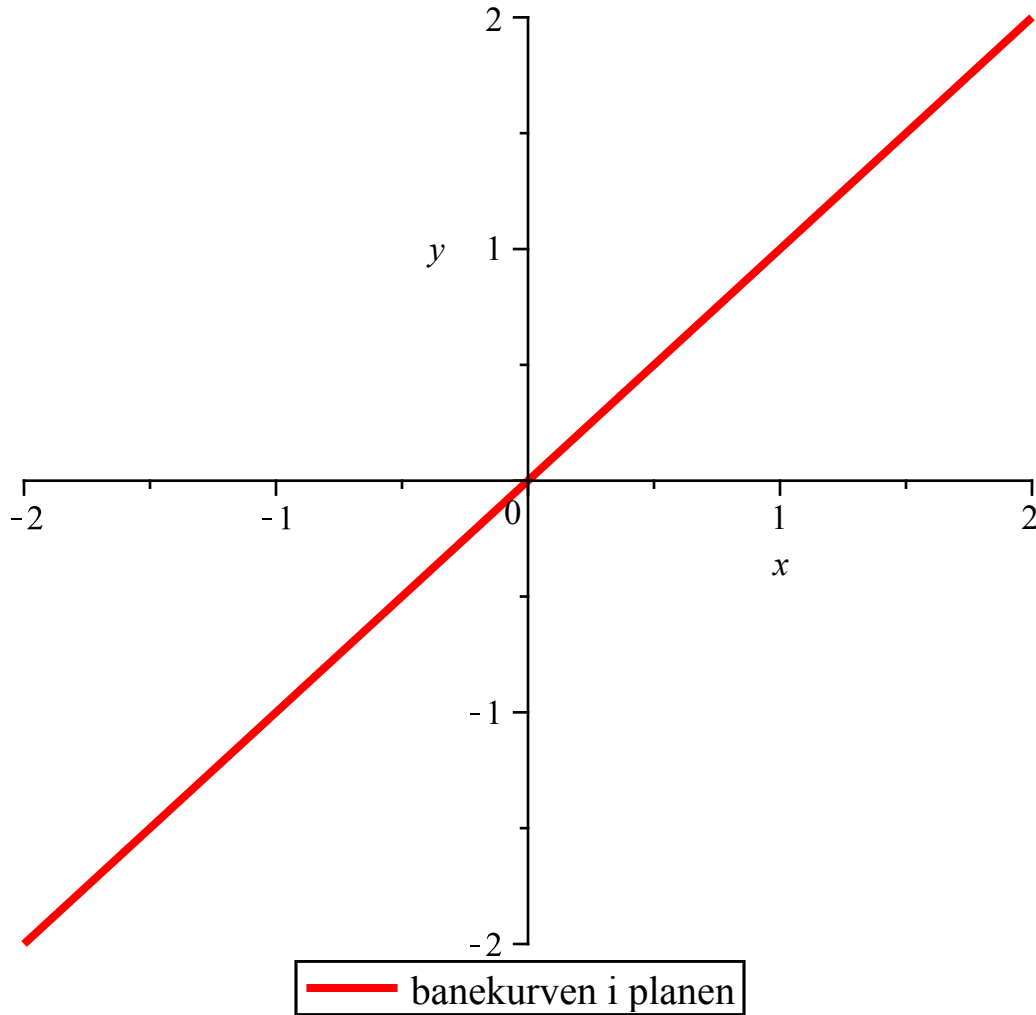
(2.2)

$$y := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t < 0, \frac{1}{2}t, 0 \leq t, 2t\right) \quad (2.2)$$

**Banekurven i planen** er en ret linje:

**NB:** Her er kun 2 koordinater:  $x$  og  $y$ .

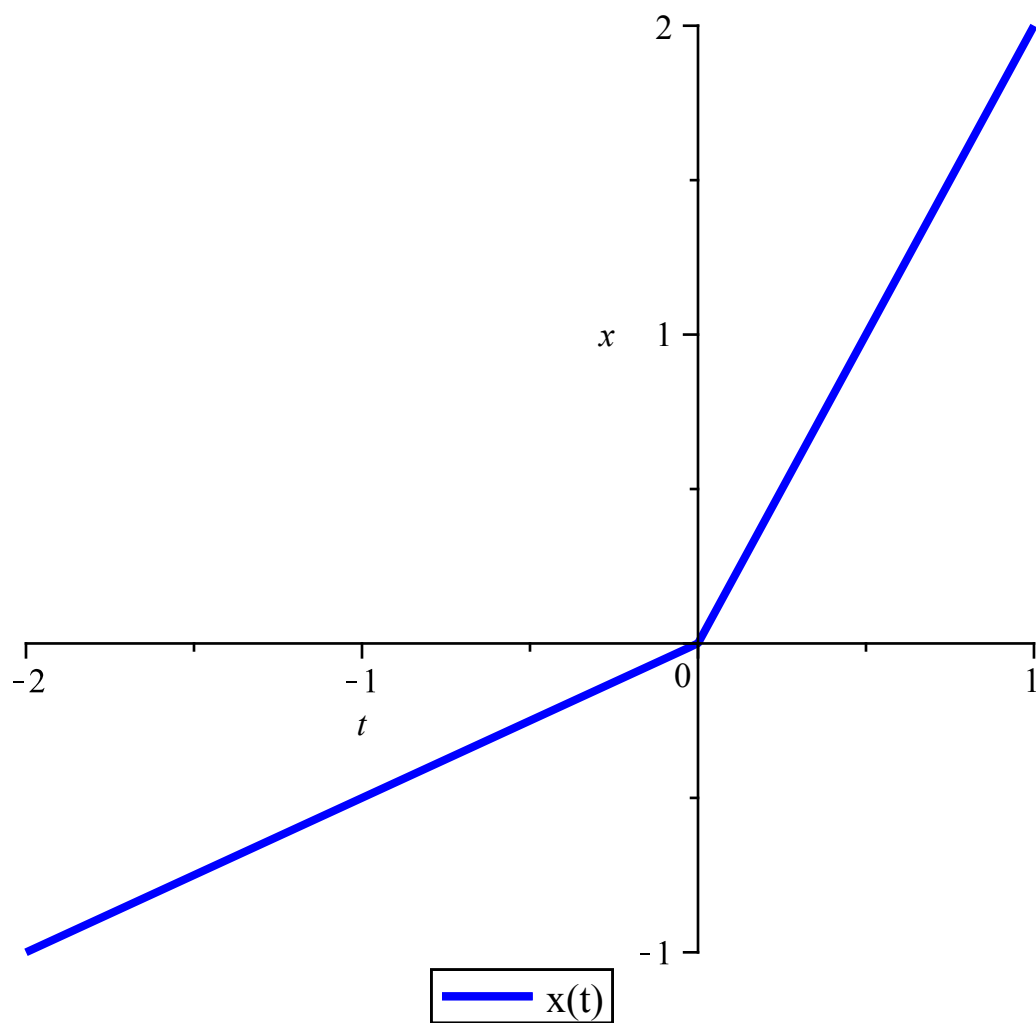
```
> plot([x(t), y(t), t=-4..1], color=red, thickness=3, labels=[x, y], legend  
= ["banekurven i planen"]);
```



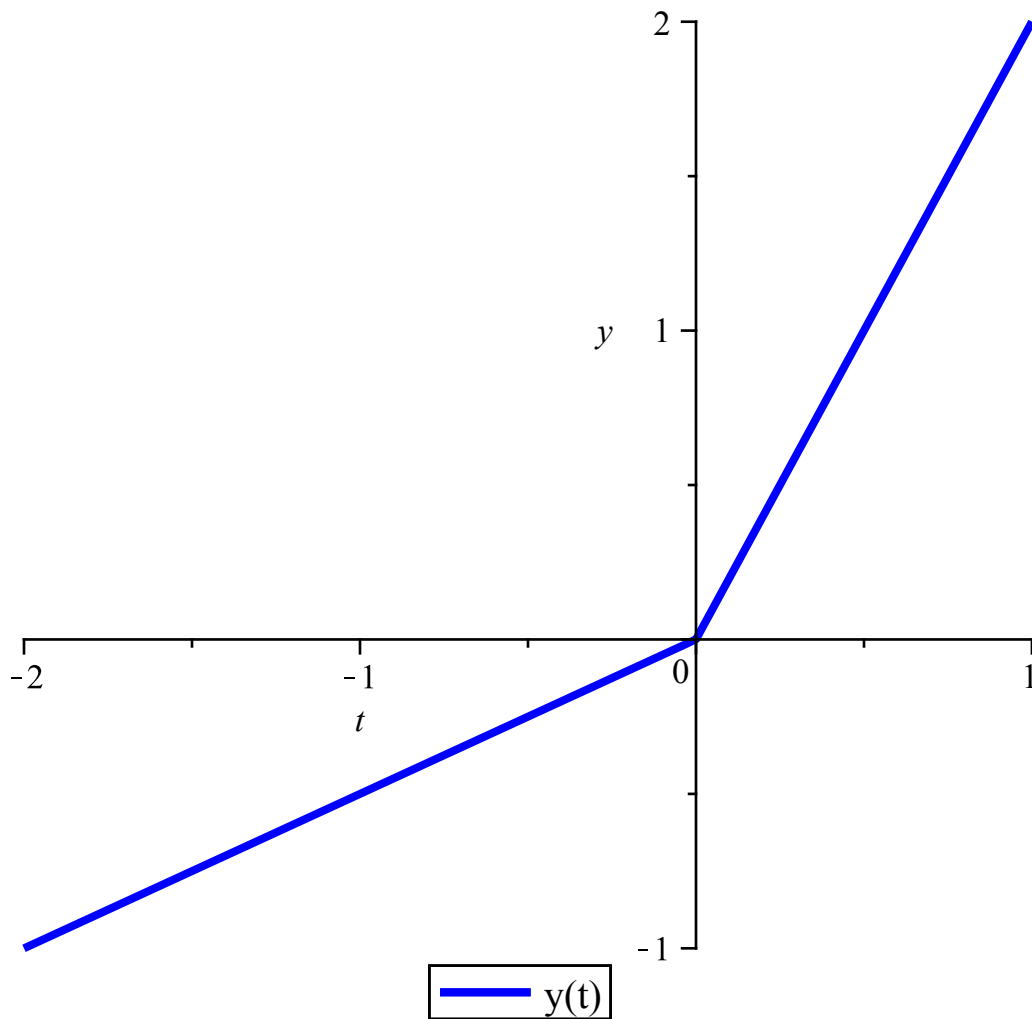
Men **koordinatfunktionerne**  $x(t)$  og  $y(t)$  er **ikke differentiable**:  
(grafene knækker i 0)

```
> plot(x(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, x], legend=["x(t)"]);
```





```
> plot(y(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"]);
```



**Banekurven i rummet er ikke-differentiabel:**

**NB:** Her er 3 koordinater:  $t$ ,  $x$  og  $y$ .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen knækker i  $t = 0$ .)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så  $t$ -aksen går ud af skærmen samt  $x$ -aksen til højre og  $y$ -aksen opad. Så fremkommer banekurven i  $x$ - $y$ -planen.)

```
> spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x, y, t]);
```

