En funktion, hvor Taylor-polynomiet kun passer på et vist område

I dette eksemple ser man, at **konvergens-radius** r for Taylor-polynomiet kan være endelig.

Det betyder, at uanset, hvor mange grader man tager med i Taylor-polynomiet, så passer den kun i intervallet $]x_0 - r; x_0 + r[$

Test påstanden ved at prøve med forskellige værdier af udviklingspunktet x_0 og graden n.

> $restart$

> $f := x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$

$$f := x \rightarrow \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

> $g := x \rightarrow mtaylor(f(x), x = 0, 5)$

$$g := x \rightarrow mtaylor(f(x), x = 0, 5) \tag{2}$$

> $g(x)$:

> $with(plots)$:

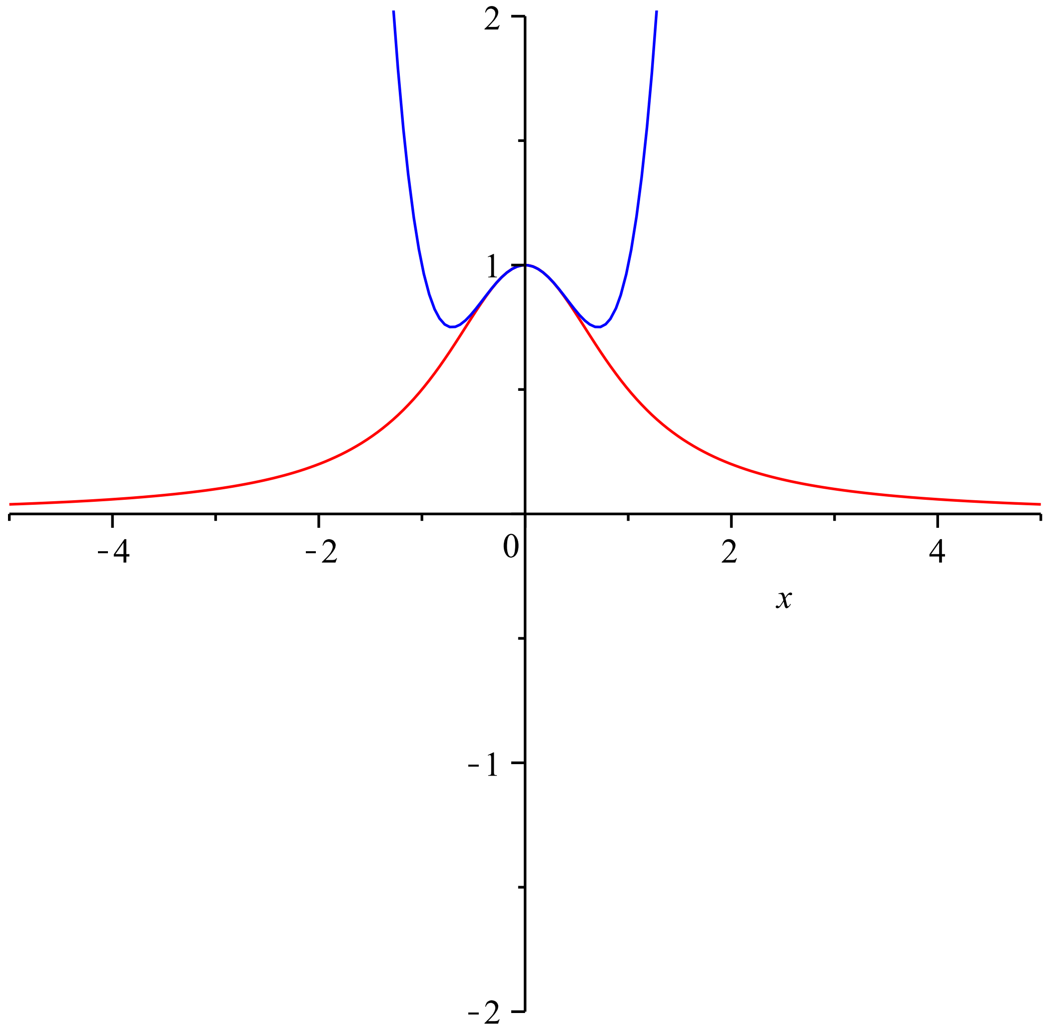
> $plot1 := plot(f(x), x = -5..5, color = red)$

$$plot1 := PLOT(...) \tag{3}$$

> $plot2 := plot(g(x), x = -5..5, color = blue)$

$$plot2 := PLOT(...) \tag{4}$$

> $display(plot1, plot2, view = [-5..5, -2..2])$



Forklaring

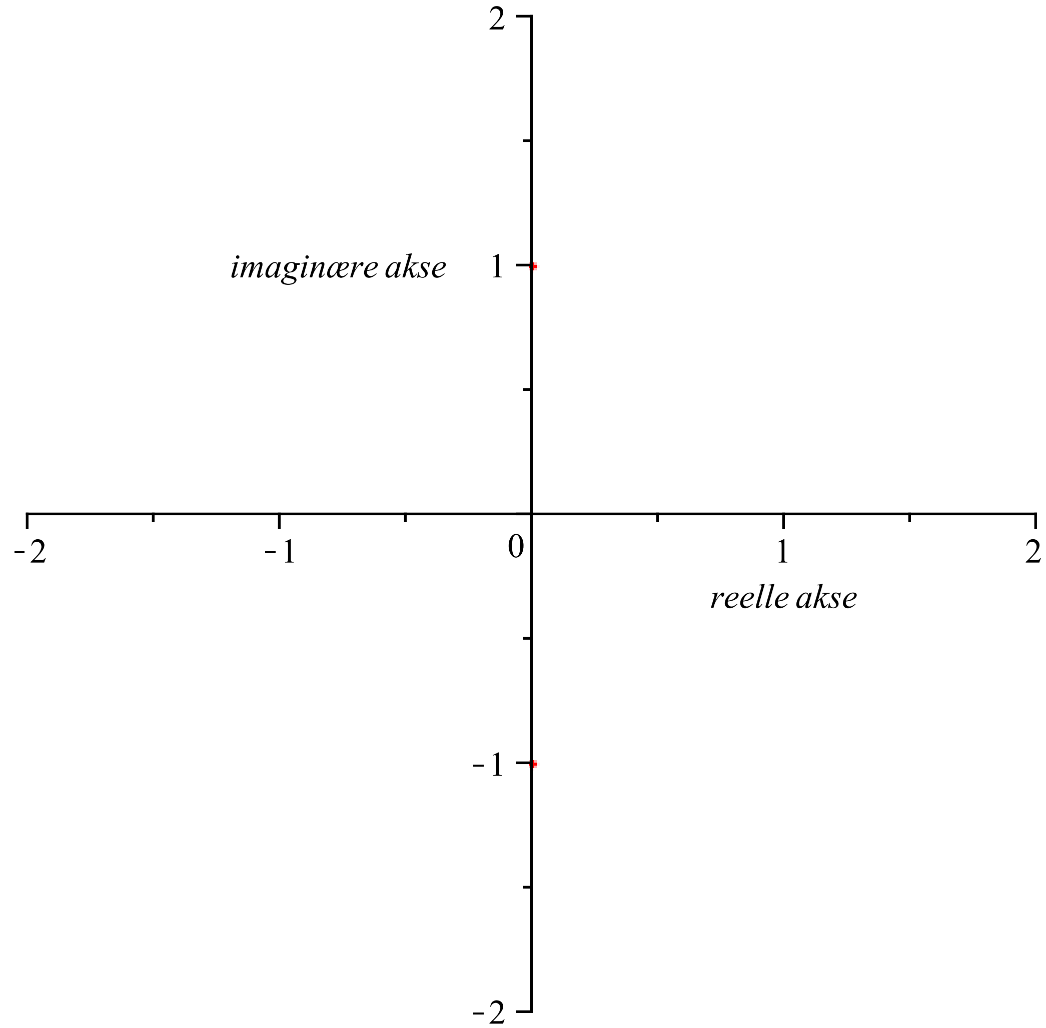
Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ er veldefineret for alle $x \in \mathbb{R}$,

Men funktionen har indenfor de komplekse tal faktisk 2 nulpunkter i nævneren:

> $solve(1 + x^2 = 0)$

$$I, -I \tag{1.1}$$

> $complexplot([\%], view = [-2..2, -2..2], style = point, labels = [reelle\ akse, imaginære\ akse])$



Nævneren i funktionen $f(x)$ har altså 2 komplekse rødder: I og $-I$.
Vi antager, at x_0 ligger på den reelle akse:

> $assume(x_0, real)$

Og finder så afstanden mellem x_0 og de 2 rødder:

> $\mathrm{abs}(x_0 - I)$

$$\sqrt{x\sim_0^2 + 1} \quad \textbf{(1.2)}$$

> $\mathrm{abs}(x_0 + I)$

$$\sqrt{x\sim_0^2 + 1} \quad \textbf{(1.3)}$$

Her gælder, at hvis udviklingspunktet hedder x_0, så er konvergensradius $r = \sqrt{x_0^2 + 1}$
Det er jo faktisk bare Pythagoras' sætning!

Passer det men dine forsøg ovenfor?