Komplekse gættemetode

2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter
eNote 13 afsnit 13.2.3
http://01005.mat.dtu.dk/2011/materialer/enoter/afsnit/NUID14-af.kompleks/

Eksempel 13.18

Differentialligning: $\boldsymbol{x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t)}$

Højresiden kan skrives:

$19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\mathrm{Re}(e^{i\cdot t}) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\mathrm{Im}(e^{i\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) - 35\cdot\mathrm{Im}(e^{(4+i)\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) + 35\cdot\mathrm{Re}(i\cdot e^{(4+i)\cdot t}) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

Bemærk fortegnsskiftet foran 35!

Gæt: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(c\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c \in \mathbb{C}$

Med simuleret håndregning får man:

> *restart*

Reel differentialligning:

> $DiffLignR := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t)$

$$DiffLignR := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t) \quad \mathbf{(1.1)}$$

Kompleks differentialligning:

> $DiffLignC := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (19 + I\cdot 35)\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$DiffLignC := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \mathbf{(1.2)}$$

Gættede løsning:

> $xGÆT := t \rightarrow c\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$xGÆT := t \rightarrow c\,e^{(4+I)\,t} \quad \mathbf{(1.3)}$$

> $subs(x = xGÆT, DiffLignC)$

$$D^{(2)}(xGÆT)(t) - 2\,D(xGÆT)(t) - 2\,xGÆT(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \mathbf{(1.4)}$$

> $simplify(\%)$

$$5\,c\,e^{(4+I)\,t} + 6\,I\,c\,e^{(4+I)\,t} = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \mathbf{(1.5)}$$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk.
Ligningen kan løses mht. *c*:

> $c := solve(\%, c)$

$$c := 5 + I \quad \mathbf{(1.6)}$$

> $xGÆT(t)$

$$(5 + I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \mathbf{(1.7)}$$

> $\mathrm{Re}(xGÆT(t))$

$$\Re((5 + I)\,e^{(4+I)\,t}) \quad \mathbf{(1.8)}$$

> $evalc(\%)$

$$5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t) \quad \mathbf{(1.9)}$$

Den partikulære løsning er således: $\underline{\underline{5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t)}}$

Test at det faktisk er en løsning til den givne **reelle** differentialligning:

> $xPARTIKULÆR := t \to$ **(1.9)**

$$xPARTIKULÆR := t \to 5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t) \qquad \textbf{(1.10)}$$

> $xPARTIKULÆR(t)$

$$5\,e^{4t}\cos(t) - e^{4t}\sin(t) \qquad \textbf{(1.11)}$$

> $subs(x = xPARTIKULÆR, DiffLignR)$

$$D^{(2)}(xPARTIKULÆR)(t) - 2\,D(xPARTIKULÆR)(t) - 2\,xPARTIKULÆR(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t) \qquad \textbf{(1.12)}$$

> $simplify(\%)$

$$e^{4t}\left(19\cos(t) - 35\sin(t)\right) = e^{4t}\left(19\cos(t) - 35\sin(t)\right) \qquad \textbf{(1.13)}$$

OK. Det passer!

Generelt:

Hvis højre siden er $= a\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t) - b\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$

Kan højre siden på kompleks form skrives $= \mathrm{Re}\left((a + b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}\right)$

Så anvendes som gæt denne funktion $xGÆT(t) = c\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$
som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentialligningen**:
$x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (a + b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$

Når c er fundet, så er den partikulære løsning givet ved: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(xGÆT(t))$