

Uge 10 LilleDag Opgave 5: Hyperbolsk sinus og cosinus

http://01005.mat.dtu.dk/2011/materialer/enoter/atom/1041/?tx_enotelms_pi1%5BreturnUrl%5D=%2F2011%2Fmaterialer%2Fenoter%2F%3Ftx_enotelms_pi1%255BshowUid%255D%3DNUID9-IDX18&cHash=bd6f6a76d16c4ca9b7d0bfe8ec2608aa

<http://01005.mat.dtu.dk/2011/materialer/enoter/afsnit/NUID27-IDX59/>

> restart

Differentialligningssystem af 1. orden med 2 ligninger, hvor $y = \cosh(x)$ og $z = \sinh(x)$:

> dsolve({y'=z, z'=y})

$$\{y(x) = _C1 e^x + _C2 e^{-x}, z(x) = _C1 e^x - _C2 e^{-x}\} \quad (1)$$

> dsolve({y'=z, z'=y, y(0) = 1, z(0) = 0})

$$\left\{y(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}, z(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}\right\} \quad (2)$$

Differentialligning af 2. orden, hvor $y = \cosh(x)$:

> dsolve(y''=y)

$$y(x) = _C1 e^x + _C2 e^{-x} \quad (3)$$

> dsolve({y''=y, y(0) = 1, y'(0) = 0})

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \quad (4)$$

Test om svaret er identisk med $\cosh(x)$:

> is(rhs(%) = cosh(x))

true (5)

Differentialligning af 2. orden, hvor $z = \sinh(x)$:

> dsolve(z''=z)

$$z(x) = _C1 e^x + _C2 e^{-x} \quad (6)$$

> dsolve({z''=z, z(0) = 0, z'(0) = 1})

$$z(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \quad (7)$$

Test om svaret er identisk med $\sinh(x)$:

> is(rhs(%) = sinh(x))

true (8)

Differentiation af hyperbolsk sinus og cosinus:

> cosh'(x)

sinh(x) (9)

> sinh'(x)

cosh(x) (10)

> cosh''(x)

cosh(x) (11)

> sinh''(x)

sinh(x) (12)

Hvad har hyperbolske funktioner med trigonometriske funktioner at gøre?

Vi ved, at $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

Så gælder også, at $e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \sin(x)$

Løses disse 2 ligninger mht. $\cos(x)$ og $\sin(x)$ får vi disse formler for de **trigonometriske funktioner**:

$$\cos(x) = \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2} \quad \text{og} \quad \sin(x) = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2 \cdot i}$$

De **hyperbolske funktioner** defineres så med de samme formler, **hvor i blot er udeladt!**

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

De hyperbolske funktioner har mange lighedspunkter med de trigonometriske funktioner:

http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function