Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 20.1 i eNote nr. 20 fra foråret 2012 på DTU Matematik 1

NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.
Det kan betyde, at de 2 egenværdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!

> *restart*

> $f := (x, y) \to 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$

$$f := (x, y) \to 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{1}$$

> $VectorCalculus[Jacobian](\langle f(x, y) \rangle, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4\,x + 2\,y - 8 & 4\,y + 2\,x - 10 \end{bmatrix} \tag{2}$$

> $VectorCalculus[Hessian](f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $H := \frac{1}{2} \cdot \%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

> $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . H . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$x\,(2\,x + y) + y\,(x + 2\,y) - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{5}$$

> $expand(\%)$

$$2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{6}$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f.

Nu skal *H* diagonaliseres:

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H, output = 'list')$

(8)

$$\left[\left[3, 1, \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}\right], \left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}\right]\right] \quad (8)$$

Egenværdier:

> $e1 := \mathbf{(8)}[1, 1]$

$$e1 := 3 \quad (9)$$

> $e2 := \mathbf{(8)}[2, 1]$

$$e2 := 1 \quad (10)$$

Egenvektorer:

> $v1 := \mathbf{(8)}[1, 3, 1]$

$$v1 := \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad (11)$$

> $v2 := \mathbf{(8)}[2, 3, 1]$

$$v2 := \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad (12)$$

Diagonalmatrix:

> $\Lambda := \begin{bmatrix}e1 & 0\\0 & e2\end{bmatrix}$

$$\Lambda := \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad (13)$$

Gram-Schmidt ortonormalisering:
http://en.wikipedia.org/wiki/Gram%E2%80%93Schmidt_process

> $LinearAlgebra[GramSchmidt](\{v1, v2\}, normalized)$

$$\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\} \quad (14)$$

Ortogonale substitutionsmatrix:

> $Q := \langle \mathbf{(14)}[1] | \mathbf{(14)}[2] \rangle$

$$Q := \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad (15)$$

Hvis determinanten er -1, skiftes fortegn i 1. søjle af Q:

> $LinearAlgebra[Determinant](Q) = -1$

$$1 = -1 \quad (16)$$

> **if** $LinearAlgebra[Determinant](Q) = -1$ **then** $Q := \langle -\mathbf{(14)}[1] | \mathbf{(14)}[2] \rangle$ **end if**

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater

$$(x_1, y_1)$$

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ **skal** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **erstattes af** $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder $2 \cdot x \cdot y$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$
$$3 \cdot \left(x_1^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1\right) + \left(y_1^2 - \sqrt{2} \cdot y_1\right) + 13 =$$
$$3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2\right) + 13 =$$
$$3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) + 13 =$$
$$3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 13 =$$
$$3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - 1 =$$
$$\left(\frac{x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{1}\right)^2 - 1$$

Dvs. $f(x, y) = 0$ **er en ellipse med halvakserne** $\sqrt{3}$ **og** 1.

Som forventet giver $Q^T \cdot H \cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

> *LinearAlgebra*[*Transpose*](Q).H.Q

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

1. grads leddet udregnes:

> $\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.Q$

$$\begin{bmatrix} -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Ellipsens centrum er $\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet (1,2):

> $Q.\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{19}$$