Komplekse gættemetode

2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter eNote 13 afsnit 13.2.3

Differentialligning: $x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t)$

Højresiden kan skrives:
$19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Re}(e^{i\cdot t}) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Im}(e^{i\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) - 35\cdot\mathrm{Im}(e^{(4+i)\cdot t}) = 19\cdot\mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) + 35\cdot\mathrm{Re}(i\cdot e^{(4+i)\cdot t}) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$
dvs. $19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

Bemærk fortegnsskiftet foran 35!

Gæt: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(c\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c \in \mathbb{C}$

NB: eNoten opererer med et mere besværligt udtryk: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}((c+id)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c, d \in \mathbb{R}$
Jeg foretrækker en **kompleks konstant** c.

<u>Med simuleret håndregning får man</u>:

> $restart$

Reel differentialligning:

> $DiffLignR := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot\cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot\sin(t)$

$$DiffLignR := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = 19\,e^{4\,t}\cos(t) - 35\,e^{4\,t}\sin(t) \quad \textbf{(1)}$$

Kompleks differentialligning:

> $DiffLignC := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (19 + I\cdot 35)\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$DiffLignC := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(2)}$$

Gættede løsning:

> $xGÆT := t \to c\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$xGÆT := t \to c\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(3)}$$

> $subs(x = xGÆT, DiffLignC)$

$$D^{(2)}(xGÆT)(t) - 2\,D(xGÆT)(t) - 2\,xGÆT(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(4)}$$

> $simplify(\%)$

$$5\,c\,e^{(4+I)\,t} + 6\,I\,c\,e^{(4+I)\,t} = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(5)}$$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk.
Ligningen kan løses mht. c:

> $c := solve(\%, c)$

$$c := 5 + I \quad \textbf{(6)}$$

> $xGÆT(t)$

$$(5 + I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(7)}$$

> $\mathrm{Re}(xGÆT(t))$

(8)

$$\Re\left((5+\mathrm{I})\,\mathrm{e}^{(4+\mathrm{I})\,t}\right) \tag{8}$$

> $evalc(\%)$

$$5\,\mathrm{e}^{4\,t}\cos(t)-\mathrm{e}^{4\,t}\sin(t) \tag{9}$$

Den partikulære løsning er således: $\underline{\underline{5\,\mathrm{e}^{4\,t}\cos(t)-\mathrm{e}^{4\,t}\sin(t)}}$

Test at det faktisk er en løsning til den givne **reelle** differentialligning:

> $xPARTIKULÆR := unapply(\%, t) : xPARTIKULÆR(t)$

$$5\,\mathrm{e}^{4\,t}\cos(t)-\mathrm{e}^{4\,t}\sin(t) \tag{10}$$

> $subs(x = xPARTIKULÆR, DiffLignR)$

$$\mathrm{D}^{(2)}(xPARTIKULÆR)(t)-2\,\mathrm{D}(xPARTIKULÆR)(t)-2\,xPARTIKULÆR(t)=19\,\mathrm{e}^{4\,t}\cos(t)-35\,\mathrm{e}^{4\,t}\sin(t) \tag{11}$$

> $simplify(\%)$

$$\mathrm{e}^{4\,t}\left(19\cos(t)-35\sin(t)\right)=\mathrm{e}^{4\,t}\left(19\cos(t)-35\sin(t)\right) \tag{12}$$

OK. Det passer!

Generelt:

Hvis højre siden er $= a\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)-b\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$
kan den skrives på kompleks form som $=\mathrm{Re}\left((a+b\cdot i)\cdot\mathrm{e}^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}\right)$

Så anvendes som gæt denne funktion $xGÆT(t)=c\cdot\mathrm{e}^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$
som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentialligningen**:
$x''(t)-2\cdot x'(t)-2\cdot x(t)=(a+b\cdot i)\cdot\mathrm{e}^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$

Når c er fundet, så er den partikulære løsning givet ved:
$xPARTIKULÆR(t)=\mathrm{Re}(xGÆT(t))$