Dobbeltintegral beregnet efter flere metoder

> *restart*

> *with(Integrator8) :*

> *with(LinearAlgebra) :*

> *with(VektAnalyse)*

$$[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop] \quad (1)$$

Et planintegral

Et trekantet område er begrænset af den vandrette linje $y = 1$, den lodrette linje $x = 1$, og den skrå linje $y = x + 1$.

Givet funktionen: $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$

Skal bestemme integralet af f over det trekantede område.

> $f := (x, y) \rightarrow 2 \cdot x \cdot y :$ '$f(x, y)$'$= f(x, y)$

$$f(x, y) = 2\,x\,y \quad (1.1)$$

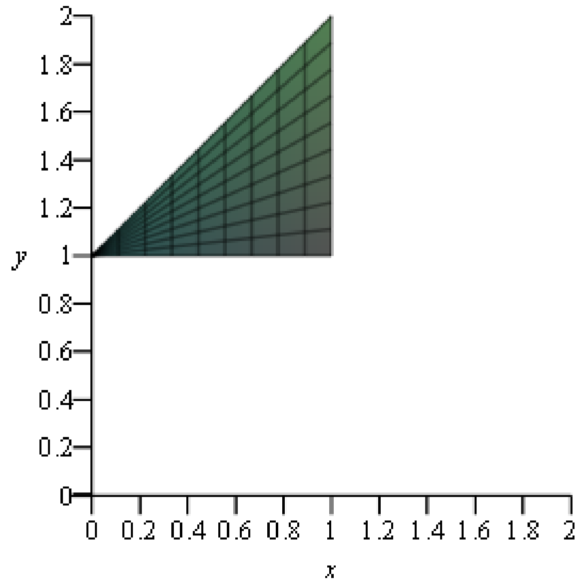
Parametrisering

$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ 1 + v \cdot u \end{bmatrix}$ hvor $u \in [0 ; 1]$ og $v \in [0 ; 1]$

> $r := (u, v) \rightarrow \langle u, 1 + v \cdot u \rangle :$ '$r(u, v)$'$= r(u, v)$

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ 1 + u\,v \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

> $plot3d\left(\langle r(u, v)_1, r(u, v)_2, 0 \rangle, u = 0..1, v = 0..1, labels = [x, y, ""], axes = normal, orientation = [-90, 0], view = [0..2, 0..2, -1..1], tickmarks = [10, 10, 10], grid = [10, 10]\right)$



Beregning af planintegral med Jacobi-faktoren (og faste integralgrænser)

> $vekdif(r(u,v),u)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.1)}$$

> $vekdif(r(u,v),v)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.2)}$$

> $Jacobi := |Determinant(\langle \% \mid \%\% \rangle)|$

$$Jacobi := |u| \quad \textbf{(1.2.3)}$$

> $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(vop(r(u,v))) \cdot Jacobi \, du \right) dv$

$$\frac{11}{12} \quad \textbf{(1.2.4)}$$

Beregning af planintegral med Integrator8-pakken

> $B := [0, 1, 0, 1]$

$$B := [0, 1, 0, 1] \tag{1.3.1}$$

> $planIntGo(r, B, f)$

$$\frac{11}{12} \tag{1.3.2}$$

Beregning af planintegral med integral, hvor grænserne ikke er konstante

Enten

Parameteren y løber mellem 1 og x+1 (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).
Parameteren x løber mellem 0 og 1.

> $\int_0^1 \int_1^{x+1} f(x, y) \, dy \, dx$

$$\frac{11}{12} \tag{1.4.1}$$

Opdelt i 2 trin:

> $\int_1^{x+1} f(x, y) \, dy$

$$x \left((x+1)^2 - 1 \right) \tag{1.4.2}$$

> $\int_0^1 \textbf{(1.4.2)} \, dx$

$$\frac{11}{12} \tag{1.4.3}$$

eller

Parameteren x løber mellem $y - 1$ og 1 (idet den rette linje $y = x + 1$ begrænser opadtil).
Parameteren y løber mellem 1 og 2.

> $\int_1^2 \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy$

$$\frac{11}{12} \tag{1.4.4}$$

Opdelt i 2 trin:

> $\int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx$

$$y \left(1 - (y-1)^2 \right) \tag{1.4.5}$$

> $\int_1^2 \textbf{(1.4.5)}\, dy$

$$\frac{11}{12} \qquad \textbf{(1.4.6)}$$