

Uge12 Lille dag F13, opgave 5: Coulomb-feltet

> restart

> with(VektAnalyse)

[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop] (1.1)

> $V := (x, y, z) \rightarrow \frac{\langle x, y, z \rangle}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} : 'V(x, y, z)' = V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Cylinder givet ved: $z \in [-h, h]$ og $\rho \in [0, a]$ og $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$

> assume(a > 0, h > 0); assume(v, real); assume(u, real); interface(showassumed = 0) :

Parametrisering af den massive cylinder, hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2 \cdot \pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r := (u, v, w) \rightarrow \langle u \cdot \sin(v), u \cdot \cos(v), w \rangle : 'r(u, v, w)' = r(u, v, w)$

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Vælger $a = 2$ og $h = 1$, så der kan tegnes:

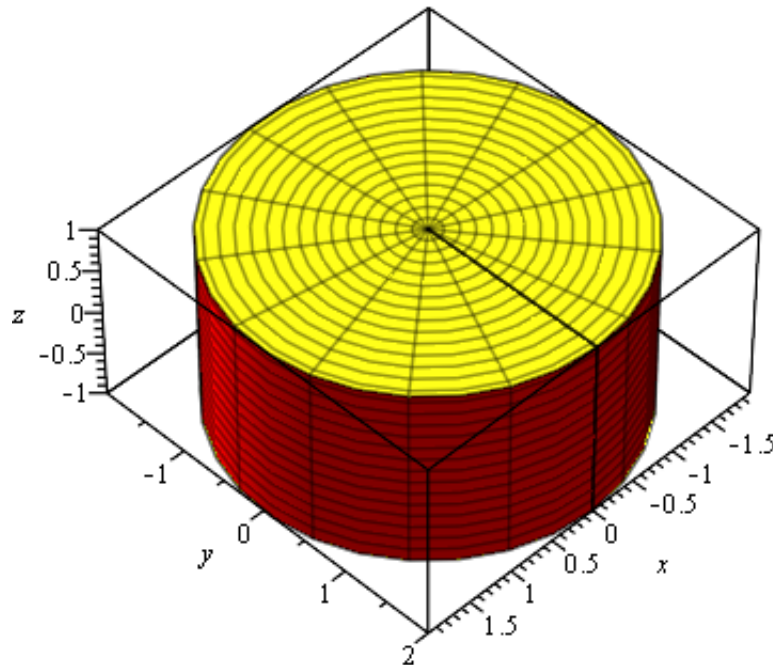
> $B := [0, 2, 0, 2 \cdot \pi, -1, 1]$

$B := [0, 2, 0, 2 \pi, -1, 1]$ (1.4)

> net := [10, 10, 10]

net := [10, 10, 10] (1.5)

> plot1 := Integrator8[sideFlader](r, B, net) :
plots[display](plot1, axes = box, labels = [x, y, z])



a) Divergensen

> $\text{div}(V)(x, y, z)$

$$-\frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (1.1.1)$$

> $\text{simplify}(\%)$

0

(1.1.2)

Dvs. divergensen af V er 0. Dog ikke defineret i origo!

b) Fluxen

Integralet af divergensen over cylinderen er 0, da divergensen er 0.

MEN. Der er jo en **singularitet** i origo, og da origo ligger inde i cylinderen, så kan **Gauss' sætning IKKE anvendes!**

Forklaring: i Gauss' sætning er det en forudsætning, at vektorfeltet V er glat, dvs. differentiabel overalt. Derfor skal den også være defineret overalt.

Parametrisering af cylinderens krumme del, hvor $v \in [0, 2 \cdot \pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r1 := (v, w) \rightarrow \langle a \cdot \cos(v), a \cdot \sin(v), w \rangle$:' $r1(v, w)$ '= $r1(v, w)$

$$r1(v, w) = \begin{bmatrix} a \cos(v) \\ a \sin(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

> $\text{vekdif}(r1(v, w), v)$

$$\begin{bmatrix} -a \sin(v) \\ a \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

> $\text{vekdif}(r1(v, w), w)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

> $N := \text{vekdif}(r1(v, w), v) \times \text{vekdif}(r1(v, w), w)$

$$N := \begin{bmatrix} a \cos(v) \\ a \sin(v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

> $\text{Integrand1} := N \cdot V(\text{vop}(r1(v, w)))$

$$\text{Integrand1} := \frac{a^2 \cos(v)^2}{(a^2 \cos(v)^2 + a^2 \sin(v)^2 + w^2)^{3/2}} + \frac{a^2 \sin(v)^2}{(a^2 \cos(v)^2 + a^2 \sin(v)^2 + w^2)^{3/2}} \quad (1.2.5)$$

> $\text{Flux1} := \int_0^{2 \cdot \pi} \left(\int_{-h}^h \text{Integrand1} dw \right) dv$

$$\text{Flux1} := \frac{4 h \pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (1.2.6)$$

Parametrisering af endflader (cirkel), hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2 \cdot \pi]$:

> $r2 := (u, v) \rightarrow \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), h \rangle$:' $r2(u, v)$ '= $r2(u, v)$; #TOP;

$r3 := (u, v) \rightarrow \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), -h \rangle$:' $r3(u, v)$ '= $r3(u, v)$; #BUND

$$r2(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ h \end{bmatrix}$$

$$r3(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ -h \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Normalvektoren til $r1$ skal gå opad, normalevektoren til $r2$ skal gå nedad. Så går de begge UD af cylinderen!

$$\begin{aligned} > N2 := \text{simplify}(\text{vekdif}(r2(u, v), u) \times \text{vekdif}(r2(u, v), v)); \\ N3 := -\text{simplify}(\text{vekdif}(r3(u, v), u) \times \text{vekdif}(r3(u, v), v)) \end{aligned}$$

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$N3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} > \text{Integrand2} := N2 \cdot V(\text{vop}(r2(u, v))); \\ \text{Integrand3} := N3 \cdot V(\text{vop}(r3(u, v))); \end{aligned}$$

$$\text{Integrand2} := \frac{u h}{(u^2 \cos(v)^2 + u^2 \sin(v)^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\text{Integrand3} := \frac{u h}{(u^2 \cos(v)^2 + u^2 \sin(v)^2 + h^2)^{3/2}} \quad (1.2.9)$$

$$> \text{Flux2} := \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \text{Integrand2} \, dv \right) du;$$

$$\text{Flux3} := \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \text{Integrand3} \, dv \right) du$$

$$\text{Flux2} := - \frac{2 \pi (-a^4 - 2 h^2 a^2 - h^4 + (a^2 + h^2)^{3/2} h)}{a^4 + 2 h^2 a^2 + h^4}$$

$$\text{Flux3} := - \frac{2 \pi (-a^4 - 2 h^2 a^2 - h^4 + (a^2 + h^2)^{3/2} h)}{a^4 + 2 h^2 a^2 + h^4} \quad (1.2.10)$$

$$> \text{Flux} := \text{Flux1} + \text{Flux2} + \text{Flux3}$$

$$(1.2.11)$$

$$\text{Flux} := \frac{4 h \pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{4 \pi (-a^4 - 2 h^2 a^2 - h^4 + (a^2 + h^2)^{3/2} h)}{a^4 + 2 h^2 a^2 + h^4} \quad (1.2.11)$$

> simplify(%)

$$4 \pi \quad (1.2.12)$$

Fluxen ud gennem cylinderen er givet ved $4 \cdot \pi$

NB: uafhængig af parametrene a og h !

Fysikken

Coulombs lov siger, at **kraften** fra en ladning Q på en lille ladning q er: $\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot q \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

hvor \vec{r} er vektoren imellem de 2 ladninger. Placeres Q i origo, er \vec{r} stedvektoren til q .
 ϵ_0 kaldes vacuumpermittiviteten.

Man definerer den **elektriske feltstørrelse** \vec{E} ved: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, altså som kraften pr. ladingseenhed.

$$\text{Dvs. } \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Gauss' sætning giver så, at det ortogonale fladeintegral af \vec{E} over enhver lukket flade, som

$$\text{indeholder ladningen } Q = \int_{\text{flade}} \vec{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

NB: Hvis fladen ikke indeslutter nogen ladning, så bliver svaret 0.

Se formlen blandt **Maxwells ligninger** til beskrivelse af **elektromagnetisme**:

http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations#Conventional_formulation_in_SI_units

Lad os teste det med en kugleskal med centrum i origo.

Så er $\vec{E} \perp$ fladen, og $|\vec{E}|$ er konstant.

Derfor bliver fluxen ud gennem kugleskallen

$$= |\vec{E}| \cdot \text{KugleskalAreal} = \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{|\vec{r}|}{r^3} \right) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

I opgave 5 ovenfor var vektorfeltet $V(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, dvs. $V = \frac{\vec{E}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot Q} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot V$

Vi fandt ved udregning, at fluxen af V ud gennem cylinderen er: $4 \cdot \pi$.

Fluxen af \vec{E} ud gennem cylinderen er så: $\left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \right) \cdot (4 \cdot \pi) = \frac{Q}{\epsilon_0}$, hvilket passer med

L L Lsætningen!