Uge 6 F13 Store Dag, opgave 6

Fejl i facitlisten samt fejl i Maple-løsningen til lærerne!

Generelt bevis for rotationsformel:

http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#Basic_rotations

http://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html

Begge kilder giver disse 3 rotationsmatricer:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det ser *mystisk* ud, at fortegnet på $\sin(\boldsymbol{\theta})$ er ombyttet ved rotation om y-aksen.
Men det *er* korrekt!

Bevis:

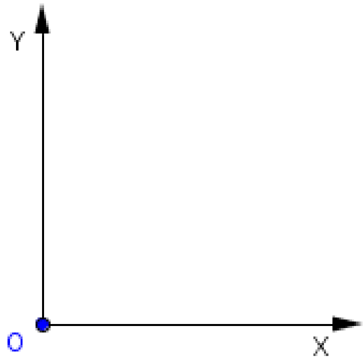
Lad x-, y- og z-aksen er et sædvanligt højrehåndssystem.

I 2 dimensioner (planen) kender vi rotationsmatricen som:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

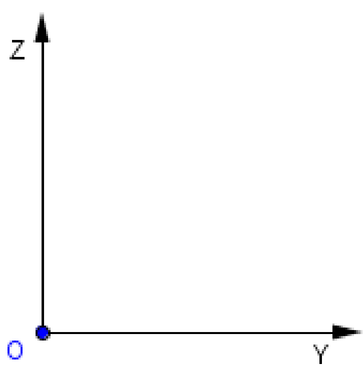
I 3 dimensioner (rummet) gælder så:

Rotation om z-aksen: Når man sidder på spidsen af z-aksen, og kikker *ned*, så ligger x-aksen og y-aksen som vist.



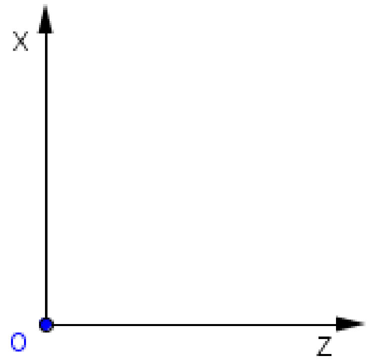
Situationen er som i 2D, dvs. x og y ændres som givet ved maticen: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotation om x-aksen: Når man sidder på spidsen af x-aksen, og kikker *ned*, så ligger y-aksen og z-aksen som vist.



Situationen er som i 2D, dvs. y og z ændres som givet ved maticen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Rotation om y-aksen: Når man sidder på spidsen af y-aksen, og kikker *ned*, så ligger x-aksen og z-aksen som vist.



Enhedsvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som på figuren går lodret opad, drejes over i enhedsvektoren $\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$, når man drejer θ grader imod uret om y-aksen (bemærk at z bliver negativ).

Enhedsvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, drejes over i sig selv, dvs. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Enhedsvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, som på figuren går vandret til højre, drejes over i enhedsvektoren $\begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$, når man drejer θ grader imod uret om y-aksen.

Derfor bliver rotationsmatricen om y-aksen: $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

som angivet på Wikipedia og på Wolfram!

Svar på opgave 6, 1. spørgsmål:

Bemærk at der roteres om y-aksen, vinklen er 45°, og retningen er **med** uret.

Dvs. $\boldsymbol{\theta} = -\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

> *restart*

> $R := \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$

$$R := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

> $r := u \rightarrow \langle u, 0, u^2 \rangle : r(u)$

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

> $R.r(u)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Hertil lægges parallelforskydningen på (1,0,1).

> $\% + \langle 1, 0, 1 \rangle$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 + 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 + 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

Konklusion:
Efter rotationen er parameterfremstillingen
$\underline{\underline{\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,u - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 + 1, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2 + 1\right)}}}$, når man regner i 3D.