Eksamensopgave, DTU matematik 1, december 2013

Opgave 1

> *restart*

> *with(LinearAlgebra)* :

a)

> $trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$trapT := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Der er 3 *ligninger* (nemlig antal rækker), og 4 *ubekendte* (nemlig antal søjler minus 1, da sidste søjle repræsenterer højresiden).
Husk at vi får at vide, at ligningssystemet er inhomogent. Hvis det var homogent, ville der være 5 ubekendte!

> *Rank(trapT)*

$$3 \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

NB: Koefficientmatricen, som aflæses er IKKE den originale matrix A. Derfor kaldes den her M. Men A og M har samme rang!

> *M* := *SubMatrix(trapT, [1 ..3], [1 ..4])*

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

> *Rank(M)*

$$3 \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

Rangen af både koefficientmatricen og totalmatricen er 3 .

(NB: passer med 3 initial-ettaller i trap(T)-matricen).

b)

> *h* := *SubMatrix(trapT, [1 ..3], [5 ..5])*

$$h := \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

> $M.\langle 1, 0, 4, 1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

> $M.\langle 1, -2, 0, 1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

> $M.\langle 0, -1, 4, -1\rangle = h$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

Kun $\underline{\underline{x_3 = (0, -1, 4, -1)}}$ er en løsning til ligningssystemet.

c)

> $LinearSolve(M, \langle 0, 0, 0\rangle)$

$$\begin{bmatrix} -2\,\_t_4 \\ \_t_4 \\ 0 \\ \_t_4 \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

Den fuldstændige løsning til det tilhørende **homogene** ligningsystem er
$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 1)}}$ hvor $t \in \mathbb{R}$

Opgave 2

> $restart$

> $with(LinearAlgebra):$

a)

> $v1 := \langle 1, 0, 1\rangle : v2 := \langle 0, 1, 0\rangle : v3 := \langle 1, 0, -1\rangle :$

> $M := \langle v1 | v2 | v3\rangle$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

> $Rank(M)$

$$3 \quad (2.1.2)$$

Da $\mathbb{R}^3$ er 3-dimensionelt, og de 3 givne vektorer er lineært uafhængige, så udgør de en basis for

$\mathbb{R}^3$.
Følger af sætning 7.29 i eNote 7.

b)

Da $Av_1 = 1 \cdot v_1$, $av_2 = 2 \cdot v_2$ og $Av_3 = -1 \cdot v_3$, er tallene $\underline{\underline{1, 2 \; og \; -1}}$ alle egenværdier for matricen M.

Af oplysningerne fremgår det, at de algebraiske multipliciteter for de 3 egenværdier alle er ≥ 1.
$am(-1) \geq 1$, $am(2) \geq 1$, $am(1) \geq 1$ så $am(-1) + am(2) + am(1) \geq 3$
Summen kan maksimalt være 3 fordi vi er i $\mathbb{R}^3$, derfor må de alle am må være 1.
Vi ved også, at hvis $am(\lambda) \geq 1 \Rightarrow gm(\lambda) \geq 1$. Samt at $am(\lambda) = 1 \Rightarrow gm(\lambda) = 1$.
Det betyder så, at alle gm må være 1.

Konklusion: $\underline{\underline{am(-1) = gm(-1) = am(2) = gm(2) = am(1) = gm(1) = 1}}$

c)

Da de 3 givne vektorer alle er egenvektorer svarende til egenværdierne -1, 2 og 1, bliver afbildningsmatricen i v-koordinatsystemet en diagonalmatrix med 1, 2 og -1 i diagonalen.

> $vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$vFv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

Afbildningsmatricen for f i v-koordinaterne er givet ved $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$

d)

Koordinatskifte-matricen er givet ved:

> $eMv := M$

$$eMv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

Og den omvendte ved:

> $vMe := (eMv)^{-1}$

(2.4.2)

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.4.2}$$

> $eFe := eMv.vFv.vMe$

$$eFe := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

Afbildningsmatricen for f i e-koordinaterne er givet ved $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opgave 3

> *restart*

a)

> $DiffLign := x'(t) + t \cdot x(t)$

$$DiffLign := \mathrm{D}(x)(t) + t\,x(t) \tag{3.1.1}$$

> $dsolve(DiffLign = 0)$

$$x(t) = \_C1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{3.1.2}$$

Løsningen til den lineære homogene 1. ordens differentialligning er $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}$ hvor $c \in \mathbb{R}$

b)

Kernen for den lineære afbildning f er $span\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}\right\}$

Fremgår direkte af definitionen af f samt løsningen af spørgsmål (a).

c)

Beregner $f(t-2)$:

> $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-2) + t \cdot (t-2);\ expand(\%)$

$$1 + t\,(t-2)$$
$$t^2 - 2\,t + 1 \tag{3.3.1}$$

> $dsolve(DiffLign = \%)$

(3.3.2)

$$x(t) = t - 2 + \_C1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \textbf{(3.3.2)}$$

Løsningen til den lineære inhomogene 1. ordens differentialligning er $\underline{\underline{x(t) = t - 2 + c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}}}$

hvor $c \in \mathbb{R}$
NB: Det er klart, at $t - 2$ er en partikulær løsning pga. den måde $q(t)$ er defineret!
Og den homogene løsning er kendt fra spørgsmål (a).
Derfor følger løsningen til den inhomogene ligning af struktursætningen: metode 11.11 i eNote 11.

Opgave 4

> *restart*

a)

Karakterligningen for den lineære homogene 2. ordens differentialligning er $\lambda^2 + a \cdot \lambda + 25 = 0$.
Derfor lyder differentialligningen: $\underline{\underline{x''(t) + a \cdot x'(t) + 25 \cdot x(t) = 0}}$

b)

> $solve\left(subs\left(a = 0, \lambda^2 + a \cdot \lambda + 25 = 0\right), \lambda\right)$

$$5\,\mathrm{I},\ -5\,\mathrm{I} \quad \textbf{(4.2.1)}$$

Løsningen til den karakterligningen for $a = 0$ er $\underline{\underline{\pm 5 \cdot i}}$

> $DiffLign := x''(t) + a \cdot x'(t) + 25 \cdot x(t) = 0$

$$DiffLign := \mathrm{D}^{(2)}(x)(t) + a\,\mathrm{D}(x)(t) + 25\,x(t) = 0 \quad \textbf{(4.2.2)}$$

> $dsolve(subs(a = 0, DiffLign))$

$$x(t) = \_C1 \sin(5\,t) + \_C2 \cos(5\,t) \quad \textbf{(4.2.3)}$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen for $a = 0$ er givet ved
$\underline{\underline{c_1 \cdot \sin(5 \cdot t) + c_2 \cdot \cos(5 \cdot t)}}$ hvor $c_1 \in \mathbb{R}$ og $c_2 \in \mathbb{R}$

NB: Svaret må ikke fremkomme via Maple, da man skal anvende de beregnede værdier i λ.
Svaret følger af sætning 13.2 formel 13.10 i eNote 13, hvor $\alpha = 0$ og $\beta = 5$.

c)

> $Løsning := t \rightarrow \mathrm{e}^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t)$

$$Løsning := t \rightarrow \mathrm{e}^{-4\,t} \cos(3\,t) \quad \textbf{(4.3.1)}$$

> $subs(x = Løsning, DiffLign)$

$$\mathrm{D}^{(2)}(Løsning)(t) + a\,\mathrm{D}(Løsning)(t) + 25\,Løsning(t) = 0 \quad \textbf{(4.3.2)}$$

> $expand(\%); simplify(\%)$

$$\frac{128 \cos(t)^3}{(\mathrm{e}^t)^4} - \frac{96 \cos(t)}{(\mathrm{e}^t)^4} + \frac{96 \sin(t) \cos(t)^2}{(\mathrm{e}^t)^4} - \frac{24 \sin(t)}{(\mathrm{e}^t)^4} - \frac{16\,a \cos(t)^3}{(\mathrm{e}^t)^4}$$

$$+\frac{12\,a\cos(t)}{(e^t)^4}-\frac{12\,a\sin(t)\cos(t)^2}{(e^t)^4}+\frac{3\,a\sin(t)}{(e^t)^4}=0$$

$$-\left(16\,a\cos(t)^3+12\,a\sin(t)\cos(t)^2-128\cos(t)^3-96\sin(t)\cos(t)^2-12\,a\cos(t)-3\,a\sin(t)+96\cos(t)+24\sin(t)\right)e^{-4t}=0 \quad \textbf{(4.3.3)}$$

> *solve*(%, *a*)

$$8 \quad \textbf{(4.3.4)}$$

$e^{-4\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t)$ er en løsning til differentialligningen, hvis $\underline{\underline{a=8}}$

d)

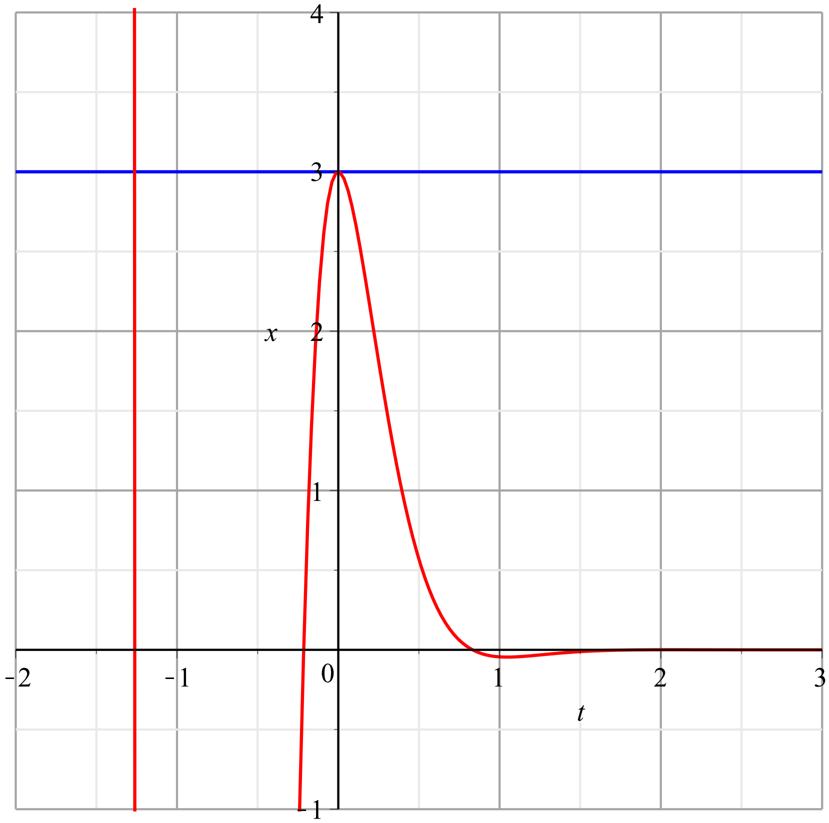
Figuren må tolkes således, at der for løsningen i tilfældet $a=8$ gælder, at $x(0)=3$ og $x'(0)=0$, idet grafen skærer y-aksen i 3, hvor der er vandret tangent.

> *dsolve*({*subs*(*a* = 8, *DiffLign*), *x*(0) = 3, *x*'(0) = 0})

$$x(t)=4\,e^{-4t}\sin(3\,t)+3\,e^{-4t}\cos(3\,t) \quad \textbf{(4.4.1)}$$

Den partikulære løsning er $\underline{\underline{x(t)=3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t)+4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\sin(3\cdot t)}}$

> *plot*($\{3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t)+4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot\sin(3\cdot t), 3\}$, *t* = -2 ..3, *x* = -1 ..4, *color* = [*blue*, *red*], *gridlines*)



> $evalf\left(subs\left(t=-2,\ 3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot \cos(3\cdot t)+4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot \sin(3\cdot t)\right)\right)$

$$11918.38530 \tag{4.4.2}$$

> $evalf\left(subs\left(t=-1,\ 3\cdot e^{-4\cdot t}\cdot \cos(3\cdot t)+4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot \sin(3\cdot t)\right)\right)$

$$-192.9748421 \tag{4.4.3}$$

NB: Den givne graf i opgaven passer ikke for $-2 < x < -1$

Her går funktionsværdien helt agurk! Fra -193 i $x=-1$ til 11918 i $x=-2$.