Den komplekse gættemetode

2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter
eNote 13 afsnit 13.2.3, eksempel 13.18

Differentialligning:

$$x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t)$$

Højresiden kan skrives:

$19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Re}(e^{i\cdot t}) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \mathrm{Im}(e^{i\cdot t}) = 19\cdot \mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) - 35 \cdot \mathrm{Im}(e^{(4+i)\cdot t}) = 19\cdot \mathrm{Re}(e^{(4+i)\cdot t}) + 35\cdot \mathrm{Re}(i\cdot e^{(4+i)\cdot t}) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

dvs. $19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t) = \mathrm{Re}((19+i\cdot 35)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$

Bemærk fortegnsskiftet foran 35!

Gæt: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}(c\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c \in \mathbb{C}$

NB: eNoten opererer med et mere besværligt udtryk: $xPARTIKULÆR(t) = \mathrm{Re}((c+id)\cdot e^{(4+i)\cdot t})$ hvor $c, d \in \mathbb{R}$
Jeg foretrækker en **kompleks konstant** c.

Med simuleret håndregning får man:

> *restart*

Reel differentialligning:

> $DiffLignR := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = 19\cdot e^{4\cdot t}\cdot \cos(t) - 35\cdot e^{4\cdot t}\cdot \sin(t)$

$$DiffLignR := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = 19\,e^{4t}\cos(t) - 35\,e^{4t}\sin(t) \quad \textbf{(1)}$$

Kompleks differentialligning:

> $DiffLignC := x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (19 + I\cdot 35)\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$DiffLignC := D^{(2)}(x)(t) - 2\,D(x)(t) - 2\,x(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(2)}$$

Gættede løsning:

> $xGÆT := t \rightarrow c\cdot e^{(4+I)\cdot t}$

$$xGÆT := t \rightarrow c\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(3)}$$

> $subs(x = xGÆT, DiffLignC)$

$$D^{(2)}(xGÆT)(t) - 2\,D(xGÆT)(t) - 2\,xGÆT(t) = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(4)}$$

> $simplify(\%)$

$$6\,I\,c\,e^{(4+I)\,t} + 5\,c\,e^{(4+I)\,t} = (19 + 35\,I)\,e^{(4+I)\,t} \quad \textbf{(5)}$$

I denne ligning kan eksponential-funktionen forkortes væk.
Ligningen kan løses mht. c:

> $c := solve(\%, c)$

$$c := 5 + I \quad \textbf{(6)}$$

> $xGÆT(t)$

$$(5+I)\, e^{(4+I)\,t} \tag{7}$$

> $\mathrm{Re}(xG\text{Æ}T(t))$

$$\Re\left((5+I)\, e^{(4+I)\,t}\right) \tag{8}$$

> $evalc(\%)$

$$5\, e^{4\,t}\cos(t) - e^{4\,t}\sin(t) \tag{9}$$

Den partikulære løsning er således: $\underline{\underline{5\, e^{4\,t}\cos(t) - e^{4\,t}\sin(t)}}$

Test at det faktisk er en løsning til den givne **reelle** differentialligning:

> $xPARTIKUL\text{Æ}R := unapply(\%, t) : xPARTIKUL\text{Æ}R(t)$

$$5\, e^{4\,t}\cos(t) - e^{4\,t}\sin(t) \tag{10}$$

> $subs(x = xPARTIKUL\text{Æ}R, DiffLignR)$

$$D^{(2)}(xPARTIKUL\text{Æ}R)(t) - 2\,D(xPARTIKUL\text{Æ}R)(t) - 2\,xPARTIKUL\text{Æ}R(t) = 19\, e^{4\,t}\cos(t) - 35\, e^{4\,t}\sin(t) \tag{11}$$

> $simplify(\%)$

$$e^{4\,t}\left(19\cos(t) - 35\sin(t)\right) = e^{4\,t}\left(19\cos(t) - 35\sin(t)\right) \tag{12}$$

OK. Det passer!

Generelt:

Hvis højre siden er $= a\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t) - b\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$

kan den skrives på kompleks form som $= \mathrm{Re}\left((a+b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}\right)$

Så anvendes som gæt denne funktion $xG\text{Æ}T(t) = c\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$
som indsættes som $x(t)$ i den **komplekse udgave af differentialligningen**:
$x''(t) - 2\cdot x'(t) - 2\cdot x(t) = (a+b\cdot i)\cdot e^{(\alpha+\omega\cdot i)\cdot t}$

Når c er fundet, så er den partikulære løsning givet ved:
$xPARTIKUL\text{Æ}R(t) = \mathrm{Re}(xG\text{Æ}T(t))$