

Anvendelse af tangentielt kurveintegral: **Gravitation**

Praktisk anvendelse i fysik af eNote 25, som omhandler *tangentielle kurveintegraler*.

http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_universal_gravitation

http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_field

http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_potential

http://en.wikipedia.org/wiki/Potential_energy

Gravitationskraften er givet ved: $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ (skalarform) og $\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$ (vektorform)

hvor r er afstanden fra f.eks. en planet med massen M , og m er massen af legemet, som påvirkes af planetens massetiltrækning.

Gravitationskraften giver anledning til begrebet **potentiell energi**: $E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

NB: Den potentielle energi er negativ, og nærmer sig 0 uendelig langt væk.

> restart

> with(VektorAnalyse2)

[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop]

(1)

$\vec{F}_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$ implementeres:

> Fgrav := (x, y, z) → $-G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \cdot \langle x, y, z \rangle : Fgrav(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{G M m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G M m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{G M m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

(2)

Kraftens arbejde beregnes som det *tangentielle kurveintegral* fra punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ til uendelig, idet nulpunktet for den potentielle energi placeres i uendelig.

Her anvendes sætning 25.2:

||| Sætning 25.2

Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs $K_{\mathbf{r}}$ kan beregnes således:

$$\text{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \, du \quad . \quad (25-7)$$

Parametrisering, hvor $u \in [1, \infty[$ (NB: når $u = 1$ er man i P_0):

$$> R := u \rightarrow \langle x_0 \cdot u, y_0 \cdot u, z_0 \cdot u \rangle$$

$$R := u \rightarrow \langle x_0 u, y_0 u, z_0 u \rangle \quad (3)$$

$$> \text{diff} \sim (R(u), u)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$> F_{\text{grav}}(\text{vop}(R(u)))$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{GMm x_0 u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm y_0 u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMm z_0 u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$> \text{prik}((4), (5))$$

$$-\frac{x_0^2 GMm u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} - \frac{y_0^2 GMm u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} - \frac{z_0^2 GMm u}{(u^2 x_0^2 + u^2 y_0^2 + u^2 z_0^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$> \text{simplify}((6)) \text{ assuming } u > 0$$

$$-\frac{GMm}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} u^2} \quad (7)$$

$$> A := \int_1^{\infty} (7) \, du$$

$$A := -\frac{GMm}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \quad (8)$$

Gravitationskraftens arbejde er altså givet ved: $A = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$, hvor $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ er afstanden fra origo til punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Dette arbejde kaldes den potentielle energi: $E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Den potentielle energi E_{pot} er en skalarfunktion, og gradientfeltet af $-E_{pot}$ er gravitationskraften

\vec{F}_{grav}

$$\begin{aligned} > E_{pot} := (x, y, z) \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} : E_{pot}(x, y, z) \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > \text{grad}(-E_{pot}(x, y, z), [x, y, z]) \\ & \left[\begin{array}{c} -\frac{GMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{GMmz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

> (2)-(10)

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (11)$$

Formel (10) er altså præcis formel (2), så svaret bliver altså:

$$\text{Gradienten af } -E_{pot} = \nabla(-E_{pot}) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{F}_{grav}$$

Fordi gravitationskraften er et gradientvektorfelt, så bliver kraftens arbejde (det tangentielle kurveintegral) uafhængig af vejen.

Det betyder, at arbejdet langs en lukket kurve er 0.

Kraften kaldes så **konservativ**.

Det er kun for konservative kraftfelter, at begrebet potentiel energi giver mening!

Andre konservative kræfter er: den elektriske kraft fra en punktladning (givet ved Coulombs lov) og fjederkraften (givet ved Hookes lov).

http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law

http://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law

Ikke-konservative kræfter er: gnidning og luftmodstand. Her er arbejdet altid *negativt* uanset vejen!

<http://en.wikipedia.org/wiki/Friction>

http://en.wikipedia.org/wiki/Air_resistance

Gravitationskraftens arbejde fra punkt P_1 til punkt P_2 er givet ved:

$$A_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{P_2} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} - \int_{P_2}^{\infty} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot} = \Delta(-E_{pot})$$

Gravitationskraftens arbejde kan altså udregnes alene som minus forskellen i potentiel energi.

Dette er i overensstemmelse med sætning 25.10:

||| Sætning 25.10 Tangentielt kurveintegral af et gradientvektorfelt

Lad $f(x, y, z)$ betegne en funktion af de tre variable i rummet, og lad $\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ betegne gradientvektorfeltet for $f(x, y, z)$. Lad K_r være en glat parametriseret kurve fra et punkt p til et punkt q i rummet. Det tangentielle kurveintegral af $\nabla f(x, y, z)$ langs K_r afhænger kun af p og q og er uafhængig af kurven:

$$\text{Tan}(\mathbf{V}, K_r) = f(q) - f(p) \quad . \quad (25-24)$$