Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 20.1 i eNote nr. 20

NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.
Det kan betyde, at de 2 egenværdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!

> *restart*

Transponering af matrix laves som en simpel procedure T:

> $T := \mathbf{proc}(M)\ LinearAlgebra[Transpose](M)\ \mathbf{end\ proc}$:

> $f := (x, y) \rightarrow 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13$

$$f := (x, y) \rightarrow 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{1}$$

> $VectorCalculus[Jacobian](\langle f(x, y)\rangle, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4\,x + 2\,y - 8 & 2\,x + 4\,y - 10 \end{bmatrix} \tag{2}$$

> $VectorCalculus[Hessian](f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $H := \frac{1}{2}\cdot\%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

> $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . H . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$(2\,x + y)\,x + (x + 2\,y)\,y - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{5}$$

> $expand(\%)$

$$2\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 - 8\,x - 10\,y + 13 \tag{6}$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f.

Nu skal H diagonaliseres:

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H)$

(7)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](H, output='list')$

$$\left[\left[3, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right] \tag{8}$$

Egenværdierne pilles ud:

> $e1 := \mathbf{(8)}[1, 1]$

$$e1 := 3 \tag{9}$$

> $e2 := \mathbf{(8)}[2, 1]$

$$e2 := 1 \tag{10}$$

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien.

Egenvektorerne pilles ud og gøres til enhedsvektorer:

> $v1 := \mathbf{(8)}[1, 3, 1]$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

> $v1 := \dfrac{v1}{\sqrt{v1 \cdot v1}}$

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

> $v2 := \mathbf{(8)}[2, 3, 1]$

$$v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

> $v2 := \dfrac{v2}{\sqrt{v2 \cdot v2}}$

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

> $\Lambda := \begin{bmatrix} e1 & 0 \\ 0 & e2 \end{bmatrix}$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Ortogonale substitutionsmatrix:

> $Q := \langle v1|v2\rangle$

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

> $LinearAlgebra[Determinant](Q)$

$$1 \qquad \textbf{(17)}$$

> **if** $LinearAlgebra[Determinant](Q) = -1$ **then** $Q := \langle v2|v1\rangle$; $v := v2$; $v2 := v1$; $v1 := v$; **end if**:

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x_1, y_1)

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ **skal** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **erstattes af** $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\cdot\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\cdot\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder $2\cdot x\cdot y$

$$3\cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\cdot\sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1 + 13 =$$
$$3\cdot\left(x_1^2 - 3\cdot\sqrt{2}\cdot x_1\right) + \left(y_1^2 - \sqrt{2}\cdot y_1\right) + 13 =$$
$$3\cdot\left(\left(x_1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\right) + 13 =$$

$$3\cdot\left(\left(x_1-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-\frac{9}{2}\right)+\left(\left(y_1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)+13=$$
$$3\cdot\left(x_1-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-\frac{27}{2}+\left(y_1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}+13=$$
$$3\cdot\left(x_1-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-1=$$
$$\left(\frac{x_1-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2+\left(\frac{y_1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{1}\right)^2-1$$

Dvs. $\boldsymbol{f(x,y)=0}$ **er en ellipse med halvakserne** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ **og 1.**

Som forventet giver $Q^T\cdot H\cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

> $T(Q).H.Q$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

1. grads leddet udregnes:

> $\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.Q$

$$\begin{bmatrix} -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

I den kvadratiske form: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}.H.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+13$

erstattes de gamle koordinater (x, y) med nye koordinater $(x1, y1)$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=Q\cdot\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$

> $T\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right).H.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix}.\left(Q.\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}\right)+13=0$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)+\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y1\right)-9\sqrt{2}\,x1-\sqrt{2}\,y1+13=0 \qquad (20)$$

> $simplify(\%)$

$$3\,x1^2+y1^2-9\sqrt{2}\,x1-\sqrt{2}\,y1+13=0 \qquad (21)$$

> $Student[Precalculus][CompleteSquare](\%)$

$$\left(y1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+3\left(x1-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2-1=0 \qquad (22)$$

Ellipsens centrum er $C1=(x1_0, y1_0)=\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet $C = (1, 2)$:

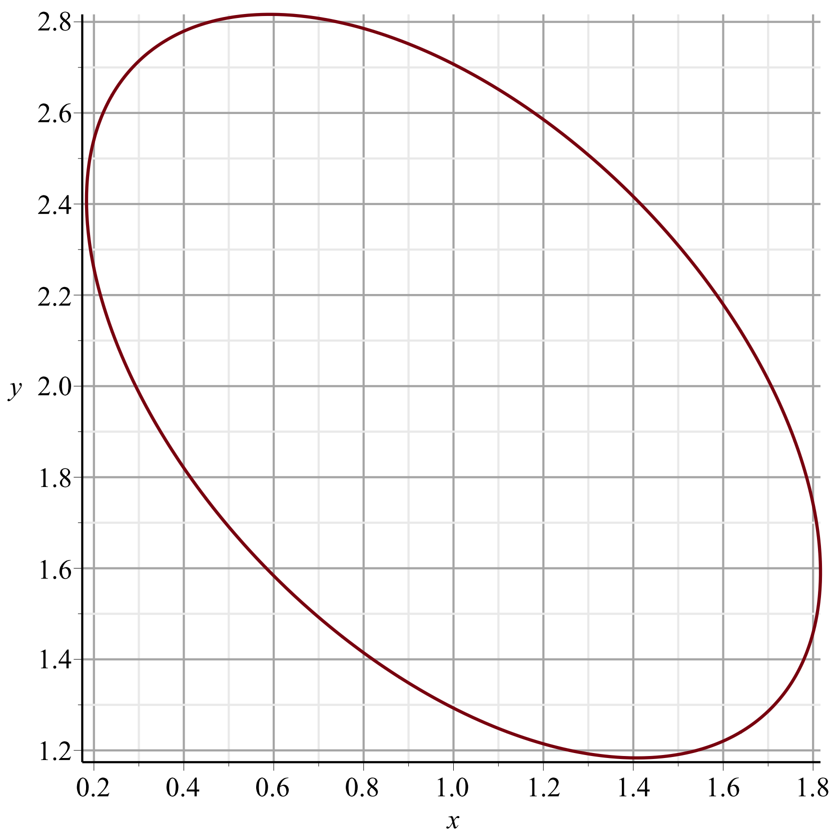
> $C := Q.\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Ellipsen plottes:

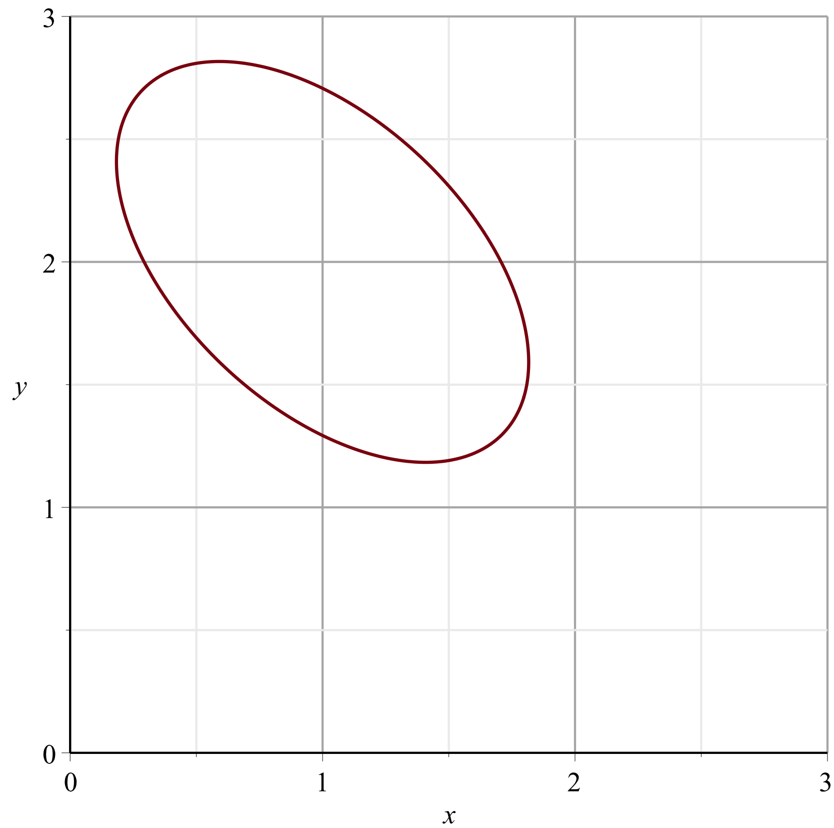
> $with(plots)$:

> $implicitplot(2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 = 0, x = 0..2, y = 1..3, numpoints = 100000, gridlines)$



Origo bør ses på plottet:

> $implicitplot(2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 = 0, x = 0..2, y = 1..3, numpoints = 100000, view = [0..3, 0..3], gridlines)$



Centrum ligger i $C = (1, 2)$.
Halvakserne går gennem centrum, og følger de nye koordinatakser!

Længden af halvakserne er fundet ovenfor som $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Halvakserne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

Ellipsen tegnes med centrum og halvakser:

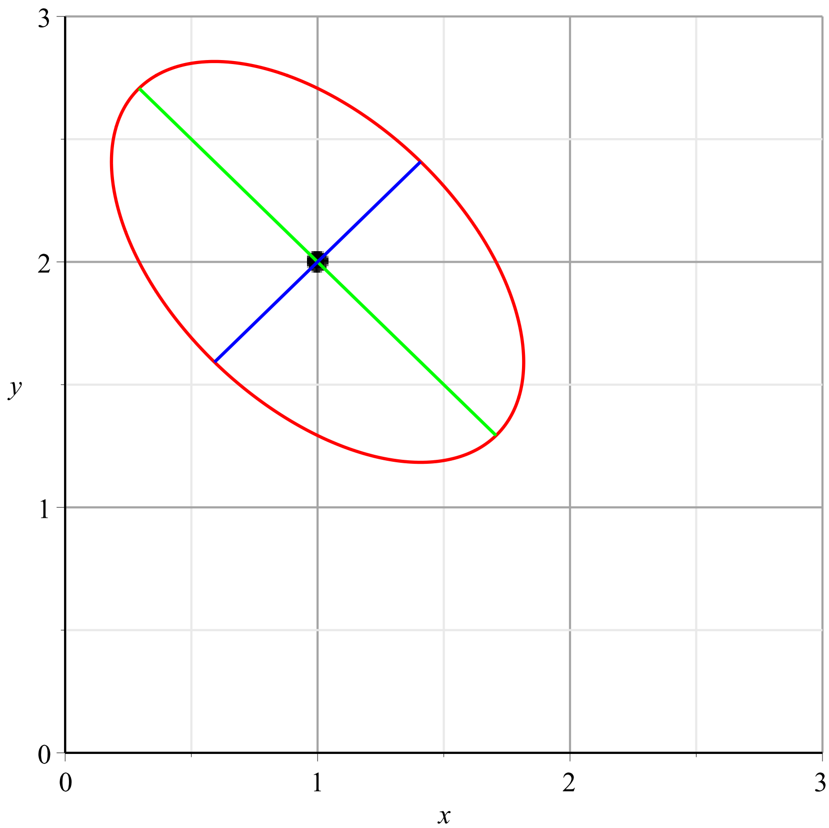
$$> ellipse := implicitplot\left(2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot x\cdot y - 8\cdot x - 10\cdot y + 13 = 0, x = 0..2, y = 1..3, numpoints = 100000, color = red\right) :$$

$$centrum := pointplot([1], [2], symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black) :$$

$$lilleakse := plot\left(\left[C_1 + t\cdot v1_1, C_2 + t\cdot v1_2, t = -\frac{\sqrt{3}}{3} .. \frac{\sqrt{3}}{3}\right], color = blue\right) :$$

$$storakse := plot\left([C_1 + t\cdot v2_1, C_2 + t\cdot v2_2, t = -1..1], color = green\right) :$$

$$display(ellipse, centrum, storakse, lilleakse, view = [0..3, 0..3], gridlines)$$



3
2
1
0
y
0
1
2
3
x