Uge 07 E12, StoreDag, Opgave 4: Baser og koordinater (advanced)

e er monomie-basis (standardbasis), ofte betegnet med *m*.
a er basis bestående af P_1, P_2, P_3
v består her af 3 vektorer: Q_1, Q_2, Q_3

> $restart;\ with(LinearAlgebra):$

Q opskrevet i a-basis:

> $aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix};\ aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\ aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

$$aQ1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aQ3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

> $aQ := \langle aQ1 | aQ2 | aQ3 \rangle;$

$$aQ := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Q opskrevet i e-basis:

> $eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix};\ eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix};\ eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$

$$eQ1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$eQ2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$eQ3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

> $eQ := \langle eQ1 | eQ2 | eQ3 \rangle;$

$$eQ := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Der gælder nu, at: ${}_eM_a \cdot aQ1 = eQ1$ og ${}_eM_a \cdot aQ2 = eQ2$ og ${}_eM_a \cdot aQ3 = eQ3$

Disse 3 ligninger kan omskrives til 1 ligning med matricer: $\boldsymbol{{}_eM_a \cdot aQ = eQ}$

(hvor aQ og eQ er 3×3 matricer med de oprindelige vektorer som søjler).

Den ubekendte i matrix-ligningen er $\boldsymbol{{}_eM_a}$

Metode 1:
Løser ligningen ved at gange med $(aQ)^{-1}$ på begge sider:

${}_eM_a \cdot aQ = eQ \Leftrightarrow ({}_eM_a \cdot aQ) \cdot (aQ)^{-1} := eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow$
${}_eM_a \cdot (aQ \cdot (aQ)^{-1}) := eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow {}_eM_a \cdot E := eQ \cdot (aQ)^{-1} \Leftrightarrow {}_eM_a = eQ \cdot (aQ)^{-1}$

> $eQ.(aQ)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

Metode 2:

Den ubekendte i ligningen ${}_eM_a \cdot aQ3 = eQ3$ er ${}_eM_a$. Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende LinearSolve(A,B)-kommandoen.
LinearSolve(A,B) løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den

står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen "$A \cdot X = B$" ved brug af transponering:
${}_eM_a \cdot aQ = eQ \Leftrightarrow ({}_eM_a \cdot aQ)^T = (eQ)^T \Leftrightarrow (aQ)^T \cdot ({}_eM_a)^T = (eQ)^T \Leftrightarrow (aQ)^T \cdot X = (eQ)^T$ hvor $X = ({}_eM_a)^T$

Det betyder, at den søgte basisskiftematrix ${}_eM_a$ fås som X^T, når ligningen kan løses med "$LinearSolve(A, B)$", hvor $A = (aQ)^T$ og $B = (eQ)^T$

> $Transpose(LinearSolve(Transpose(aQ), Transpose(eQ)));$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

<u>**Metode 3**</u>**:**

Den ubekendte i ligningen ${}_eM_a \cdot aQ3 = eQ3$ er ${}_eM_a$. Dvs. man kan ikke umiddelbart anvende LinearSolve(A,B)-kommandoen.
LinearSolve(A,B) løser nemlig ligningen: $A \cdot X = B$. Man skal først have flyttet den ubekendte, så den står til højre i matrix-produktet.

Ligningen omskrives til formen "$A \cdot X = B$" ved brug af invertering:
${}_eM_a \cdot aQ = eQ \Leftrightarrow ({}_eM_a \cdot aQ)^{-1} = (eQ)^{-1} \Leftrightarrow (aQ)^{-1} \cdot ({}_eM_a)^{-1} = (eQ)^{-1} \Leftrightarrow (aQ)^{-1} \cdot X = (eQ)^{-1}$ hvor $X = ({}_eM_a)^{-1}$

Det betyder, at den søgte basisskiftematrix ${}_eM_a$ fås som X^{-1}, når ligningen kan løses med "$LinearSolve(A, B)$", hvor $A = (aQ)^{-1}$ og $B = (eQ)^{-1}$

> $(LinearSolve((aQ)^{-1}, (eQ)^{-1}))^{-1};$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Konklusion: $\underline{\underline{{}_eM_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}}$

P 'erne står nu som søjler udtrykt ved standard-basis (monomiske basis):

Konklusion:

$$\underline{\underline{P_1(x) = 1 + x^2,\ P_2(x) = -1 - x - 3 \cdot x^2,\ P_3(x) = 6 + x + 5 \cdot x^2}}$$