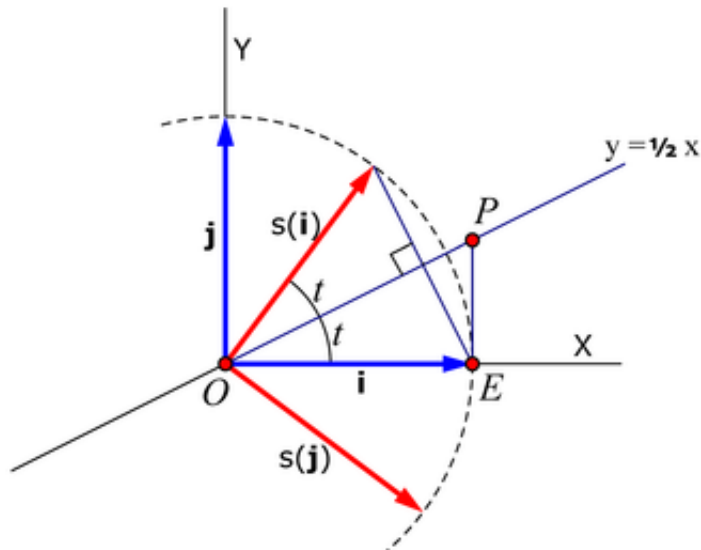


Uge 8, StoreDag, Opgave 2 del 3: Spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$

Bestemmelse af afbildningsmatricen hørende til spejling i linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$



Linjen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

Derfor gælder, at $\tan(t) = \frac{1}{2}$

Anvender formler for $\sin(2 \cdot t)$ og $\cos(2 \cdot t)$:

http://en.wikipedia.org/wiki/Double-angle_formula#Double-angle.2C_triple-angle.2C_and_half-angle_formulae

Double-angle formulae ^{[17][18]}	
$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $= 2 \cos^2 \theta - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \theta$ $= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

Dvs.

$$\cos(2 \cdot t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{og } \sin(2 \cdot t) = \frac{2 \cdot \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Så koordinaterne for } s(\mathbf{i}) = (\cos(2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$$

Da $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ vil $s(\mathbf{i}) \perp s(\mathbf{j})$.

$$\text{Mere præcist er } s(\mathbf{j}) = -\text{tværvæktor}(s(\mathbf{i})) = -\text{tværvæktor}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}}$$

Afbildningsmatricen har så koordinaterne:
$$\begin{bmatrix} s(\mathbf{i})_x & s(\mathbf{j})_x \\ s(\mathbf{i})_y & s(\mathbf{j})_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}}$$

Alternativt bevis:

Anvender rotationsmatricen i \mathbb{R}^2 , dvs. 2 dimensioner.
Lad t have samme betydning som ovenfor.

Afbildningen opbygges af 3 lineære afbildninger:

- 1) Først drejes vinklen $-t$ med uret (dvs. t imod uret). Nu ligger spejlingsaksen $y = \frac{1}{2} \cdot x$ på selve x-aksen.
- 2) Så foretages en *spejling* i x-aksen.
- 3) Til sidst drejes vinklen t med uret. Dette er den inverse afbildning af nr. 1.

Rotationsmatricer findes let på Wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Spejling i x-aksen: \mathbf{i} går over i sig selv, og \mathbf{j} går over i $-\mathbf{j}$.

Matricerne har så følgende værdi:

> restart

$$\begin{aligned}
 > A1 := \begin{bmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix}; A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; A3 := A1^{-1} \\
 & \quad A1 := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \\
 & \quad A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \quad A3 := \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{bmatrix} \tag{1}
 \end{aligned}$$

De 3 lineære afbildninger sættes sammen:

$$\begin{aligned}
 > A := A3 \cdot A2 \cdot A1 \\
 A := \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)^2}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} - \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{2 \cos(t) \sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{2 \cos(t) \sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} & \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} - \frac{\cos(t)^2}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{bmatrix} \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 > A := \text{simplify}(A) \\
 A := \begin{bmatrix} 2 \cos(t)^2 - 1 & 2 \cos(t) \sin(t) \\ 2 \cos(t) \sin(t) & -2 \cos(t)^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{3}
 \end{aligned}$$

NB: I følge formlerne for dobbelte vinkler ovenfor,
er denne matrix A identisk med $\begin{bmatrix} \cos(2 \cdot t) & \sin(2 \cdot t) \\ \sin(2 \cdot t) & -\cos(2 \cdot t) \end{bmatrix}$
som jo netop har søjlevektorerne $s(\mathbf{i})$ og $-t\text{værvektor}(s(\mathbf{i}))$.

Nu indsættes værdien af t :

$$\begin{aligned}
 > t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\
 t := \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \tag{4}
 \end{aligned}$$

Og afbildningsmatricen kan bestemmes:

$$\begin{aligned}
 > A \\
 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{5}
 \end{aligned}$$