

Differentiabilitet af vektorfunktion

Man kan ikke se på 2D-banekurve for en vektorfunktion $f(t)=(x(t),y(t))$ om den er differentiabel.

NB: Man skal undersøge om hver af koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiabel.

Eksempel på en differentiabel vektorfunktion af 2 variable

> *restart; with(plots) :*

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ t^2 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

> $x := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, t^2, t \leq 0, 0);$

$$x := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, t^2, t \leq 0, 0) \quad (1.1)$$

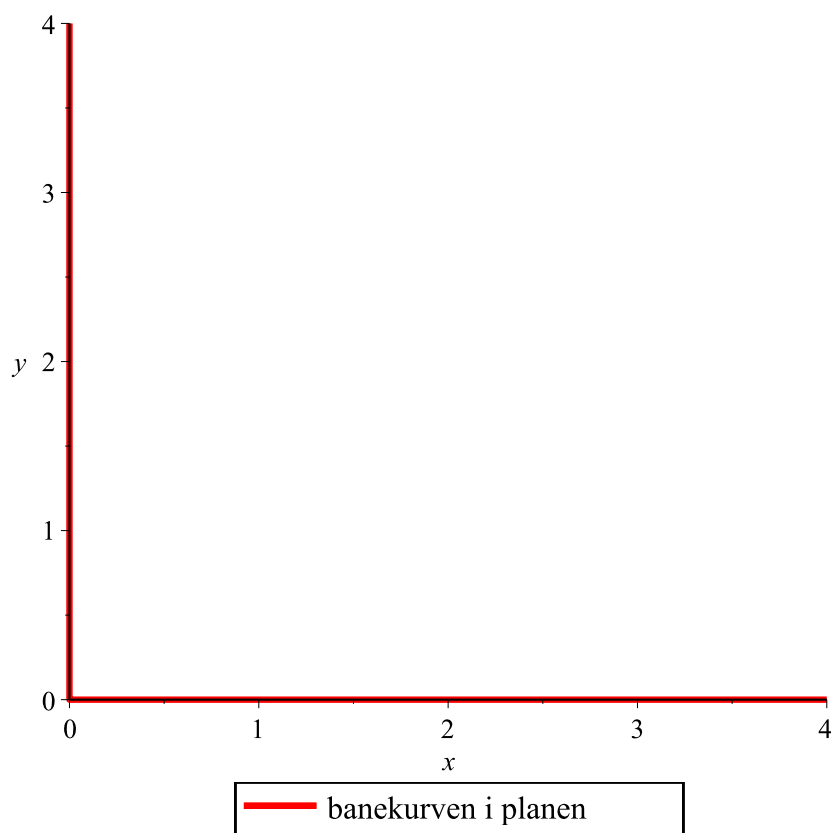
> $y := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, 0, t \leq 0, t^2);$

$$y := t \rightarrow \text{piecewise}(0 < t, 0, t \leq 0, t^2) \quad (1.2)$$

Banekurven i planen knækker 90° i $(0,0)$:

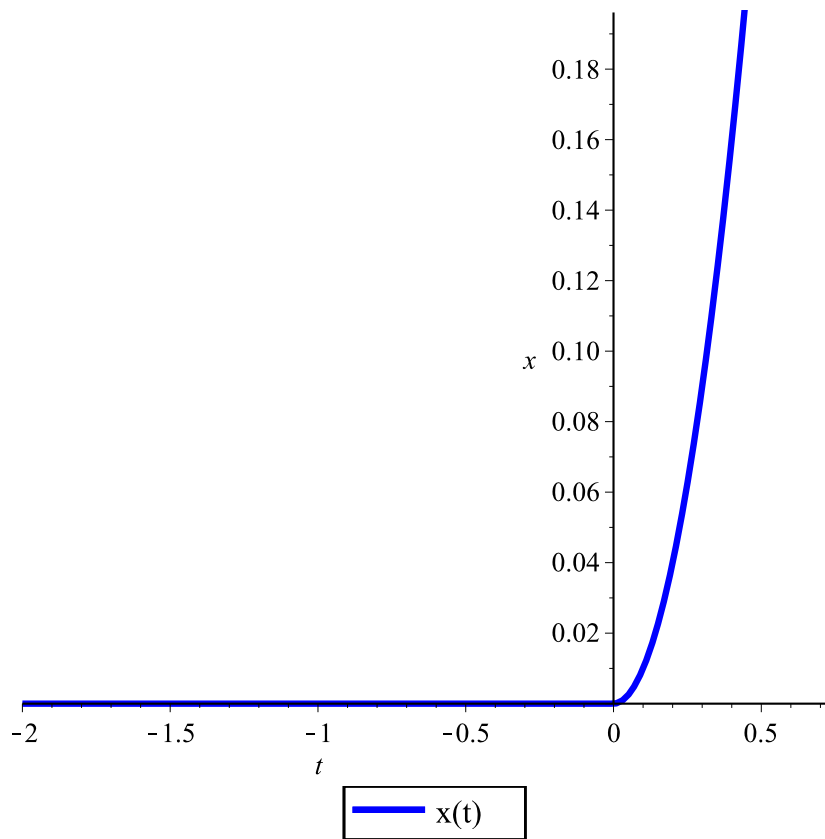
NB: Her er kun 2 kordinater: x og y.

> $\text{plot}([x(t), y(t), t=-2..2], \text{color}=\text{red}, \text{thickness}=3, \text{labels}=[x, y], \text{legend}=[\text{"banekurven i planen"}]);$

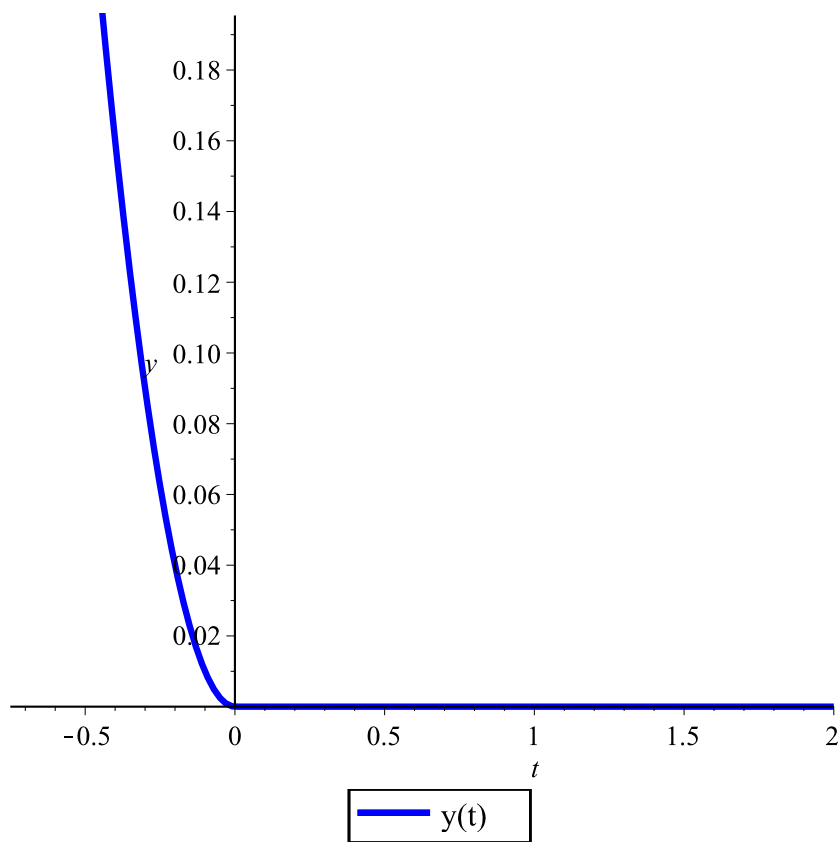


Men funktionen $f(t)=(x(t),y(t))$ er en differentiabel funktion, da **koordinatfunktionerne** $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable:

> `plot(x(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t,x], legend=["x(t)"]);`



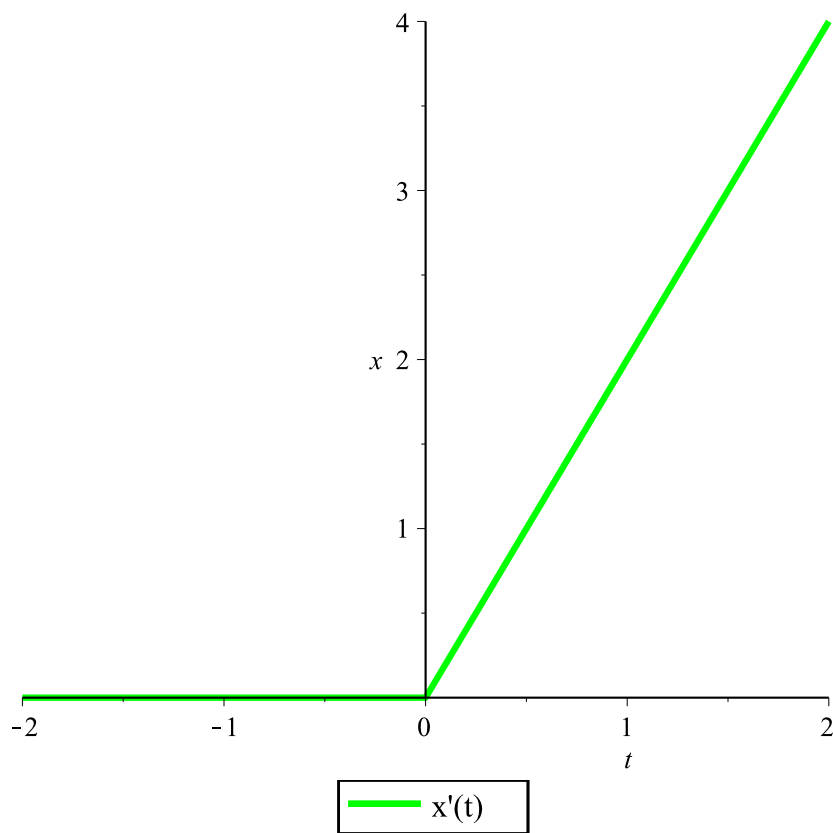
```
> plot(y(t), t=-2..2, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"]);
```



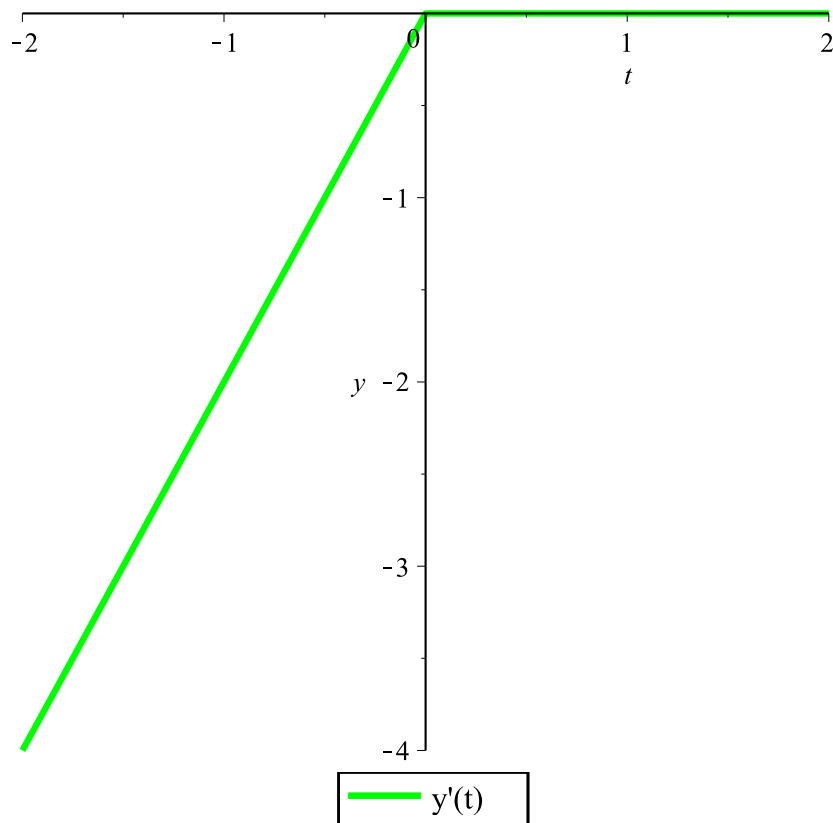
Koordinatfunktionernes afledede $x'(t)$ og $y'(t)$ er **kontinuerte** funktioner af t :

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \\ 2t & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

`> plot(x'(t), t=-2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["x'(t)"], labels = [t, x]);`



```
> plot(y'(t), t=-2..2, color = green, thickness = 3, legend = ["y'(t)"], labels = [t, y]);
```



Banekurven i rummet er differentiabel:

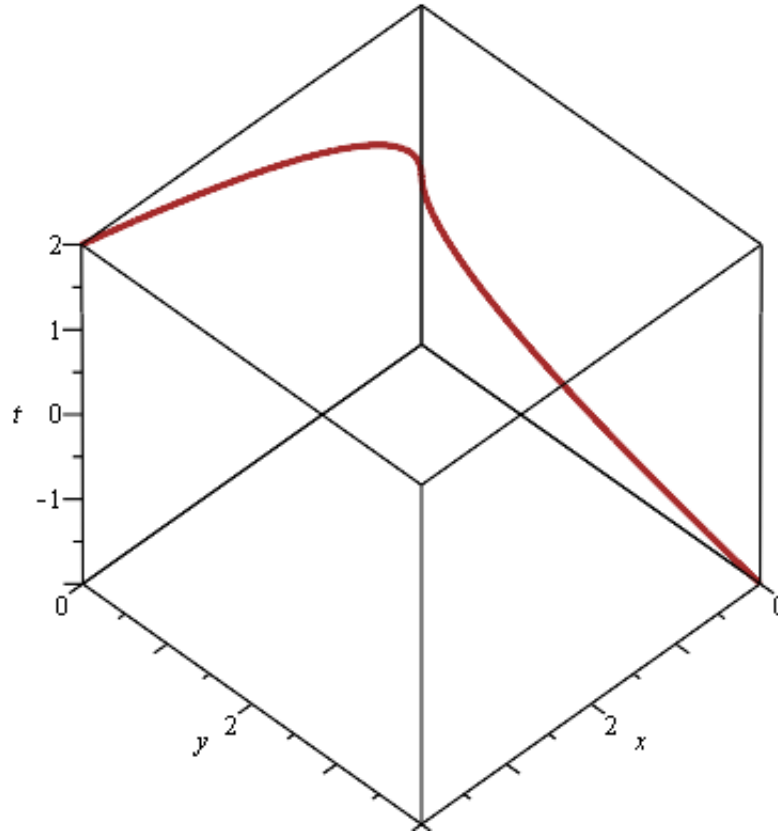
NB: Her er 3 koordinater: t , x og y .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. Grafen er simpelthen glat - også i $t = 0$.)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t -aksen går ud af skærmen samt x -aksen til højre og y -aksen opad. Så fremkommer banekurven i x - y -planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x,`
`y, t]);`

$t = 0$.



Eksempel på en ikke-differentiabel vektorfunktion af 2 variable

```
> restart; with(plots) :
```

Definer følgende koordinat-funktioner:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t & \text{for } t < 0 \\ 2 t & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

```
> x := t -> piecewise(t < 0, 1/2 * t, t >= 0, 2 * t);
```

$$x := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t < 0, \frac{1}{2} t, 0 \leq t, 2 t\right) \quad (2.1)$$

```
> y := t -> piecewise(t < 0, 1/2 * t, t >= 0, 2 * t);
```

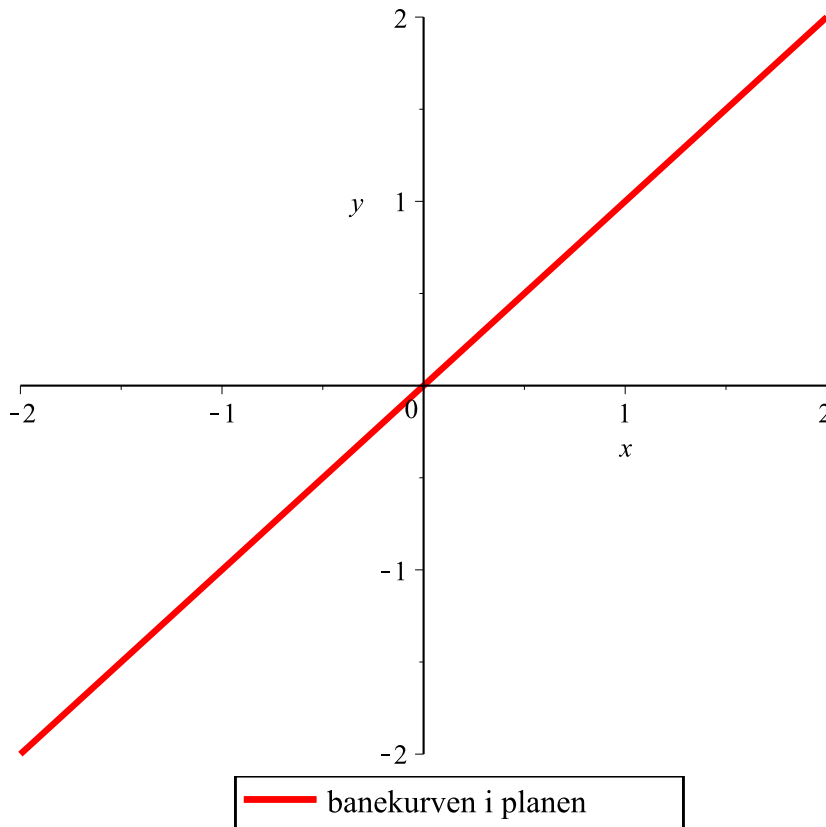
(2.2)

$$y := t \rightarrow \text{piecewise} \left(t < 0, \frac{1}{2} t, 0 \leq t, 2t \right) \quad (2.2)$$

Banekurven i planen er en ret linje:

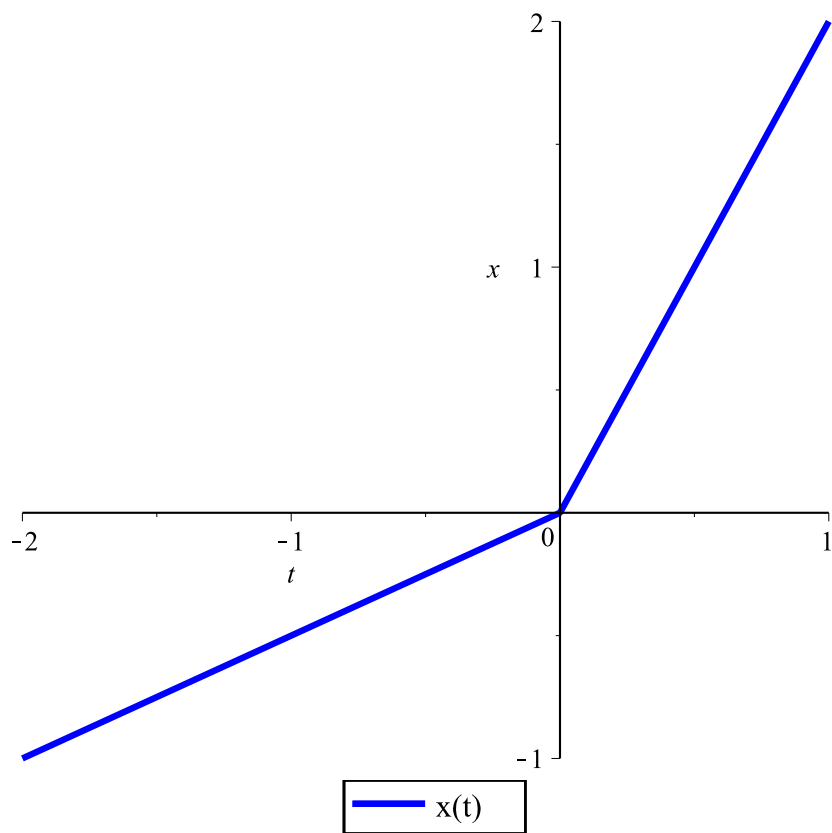
NB: Her er kun 2 koordinater: x og y.

```
> plot([x(t), y(t), t=-4..1], color=red, thickness=3, labels=[x, y], legend
= ["banekurven i planen"]);
```

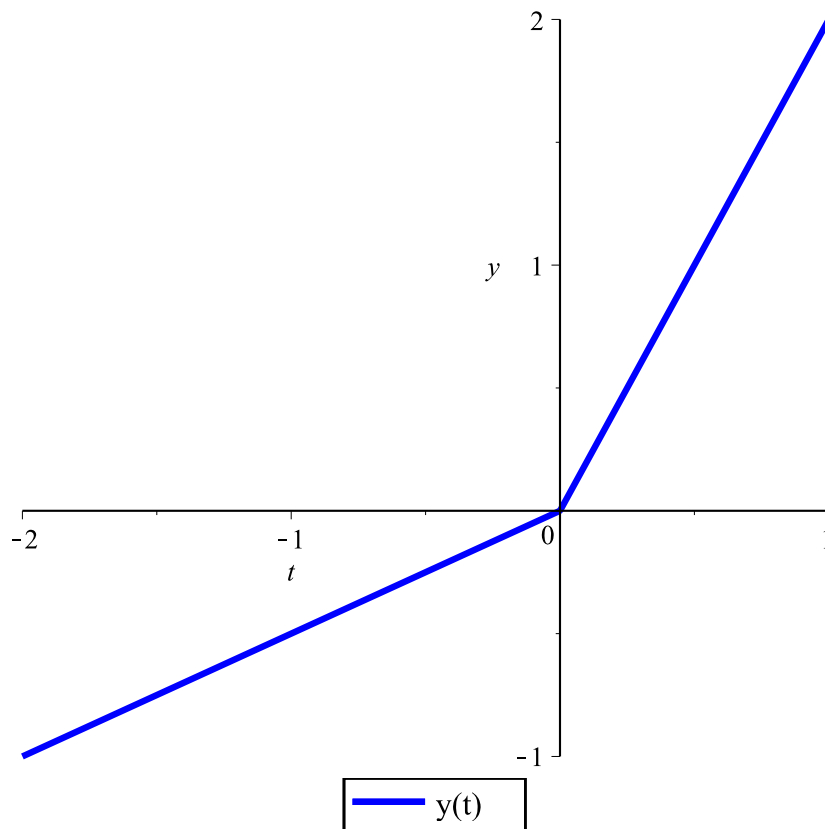


Men koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er ikke differentiable:
(grafnen knækker i 0)

```
> plot(x(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, x], legend=["x(t)"]);
```

```
> plot(y(t), t=-2..1, color=blue, thickness=3, labels=[t, y], legend=["y(t)"]);
```



Banekurven i rummet er ikke-differentiabel:

NB: Her er 3 koordinater: t , x og y .

(Rotér grafen og se fra forskellige vinkler. *Grafen knækker i $t = 0$.*)

(Prøv også at dreje koordinatsystemet, så t -aksen går ud af skærmen samt x -aksen til højre og y -aksen opad. Så fremkommer banekurven i x - y -planen.)

> `spacecurve([x(t), y(t), t], t=-2..2, thickness=3, color=brown, axes=BOXED, labels=[x, y, t]);`

