

Kinetisk energi for en partikel

Opgaven er en kommentar til **opgave 7** fra semesteruge 1, foråret 2015, store dag.

Formlen for kinetisk energi lyder, når der regnes relativistisk:

$$E_{kin}(v) = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right), \quad 0 \leq v < c,$$

Formlen kan også skrives:

$$E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2, \text{ hvor } m_0 \text{ er hvilemassen, og } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ er massen, når partiklen bevæger}$$

sig med farten v .

Klassiske formel for kinetisk energi

Taylorudvikling af funktionen:

> restart

$$> E_{kin} := v \rightarrow m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

$$E_{kin} := v \rightarrow m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (1.1)$$

> taylor(Ekin(v), v=0, 20)

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0}{c^2} v^4 + \frac{5}{16} \frac{m_0}{c^4} v^6 + \frac{35}{128} \frac{m_0}{c^6} v^8 + \frac{63}{256} \frac{m_0}{c^8} v^{10} + \frac{231}{1024} \frac{m_0}{c^{10}} v^{12} \quad (1.2)$$

$$+ \frac{429}{2048} \frac{m_0}{c^{12}} v^{14} + \frac{6435}{32768} \frac{m_0}{c^{14}} v^{16} + \frac{12155}{65536} \frac{m_0}{c^{16}} v^{18} + O(v^{20})$$

> taylor(Ekin(v), v=0, 4)

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 + O(v^4) \quad (1.3)$$

> mtaylor(Ekin(v), v=0, 4)

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (1.4)$$

Konklusion: Den klassiske formel for kinetisk energi $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$ er altså Taylor-polynomiet af

3. grad til den relativistiske formel.

Hvor god er så approksimationen?

Som man kan se af Taylor-udviklingen ovenfor, så er alle led positive, dvs. fejlen vokser når v vokser.

Antag at $v \leq 10\%$ af c , dvs. $v \leq 0.1 \cdot c$

Den maksimale fejl findes derfor, når $v = 0.1 \cdot c$

Fejlen skal nu beregnes:

$$\begin{aligned} > \text{MaxFejlAbsolut} &:= E_{\text{kin}}(0.1 \cdot c) - \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot (0.1 \cdot c)^2 \\ & \text{MaxFejlAbsolut} := 0.000037815000 m_0 c^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} > \text{MaxfejlProcent1} &:= \frac{\text{MaxFejlAbsolut}}{E_{\text{kin}}(0.1 \cdot c)} \cdot 100 \\ & \text{MaxfejlProcent1} := 0.7506230380 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} > \text{MaxfejlProcent2} &:= \frac{\text{MaxFejlAbsolut}}{\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot (0.1 \cdot c)^2} \cdot 100 \\ & \text{MaxfejlProcent2} := 0.7563000000 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Konklusion: Når $v \leq 10\%$ af c , vil man maksimalt lave en fejl på godt $\frac{3}{4}\%$, hvis man anvender den klassiske formel for kinetisk energi (frem for den relativistiske).

NB: Fejlens størrelse i procent er uafhængig af massen.