

Omskrivning af en kvadratisk form i 2 variable

Eksemplet er en uddybning af Eksempel 20.1 i eNote nr. 20

**NB: Når du kører Maple-filen med !!! vil der ske det, at resultatet i ligning 8 kan komme ud på forskellige måde.
Det kan betyde, at de 2 egenverdier er ombyttet, og egenvektorerne har modsatte koordinater!**

> restart

Transponering af matrix laves som en simpel procedure T :

> $T := \text{proc}(M) \text{ LinearAlgebra[Transpose]}(M) \text{ end proc}$:

> $f := (x, y) \rightarrow 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$

$$f := (x, y) \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 8x - 10y + 13 \quad (1)$$

> $\text{VectorCalculus[Jacobian]}(\langle f(x, y) \rangle, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4x + 2y - 8 & 2x + 4y - 10 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> $\text{VectorCalculus[Hessian]}(f(x, y), [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> $H := \frac{1}{2} \cdot \%$

$$H := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Den kvadratiske form kan så skrives:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

Formlen kontrolleres:

> $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

$$(2x + y)x + (x + 2y)y - 8x - 10y + 13 \quad (5)$$

> $\text{expand}(\%)$

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 10y + 13 \quad (6)$$

Hvilket præcist er den givne kvadratiske form f .

Nu skal H diagonaliseres:

> $\text{LinearAlgebra[Eigenvectors]}(H)$

(7)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

> `LinearAlgebra[Eigenvalues](H, output='list')`

$$\left[\left[3, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[1, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right] \quad (8)$$

Egenværdierne pilles ud:

> `e1 := (8)[1, 1]`

$$e1 := 3 \quad (9)$$

> `e2 := (8)[2, 1]`

$$e2 := 1 \quad (10)$$

Egenrummene står vinkelret på hinanden i følge teorien.

Egenvektorerne pilles ud og gøres til enhedsvektorer:

> `v1 := (8)[1, 3, 1]`

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

> `v1 := $\frac{v1}{\sqrt{v1 \cdot v1}}$`

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

> `v2 := (8)[2, 3, 1]`

$$v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

> `v2 := $\frac{v2}{\sqrt{v2 \cdot v2}}$`

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

> `Λ := $\begin{bmatrix} e1 & 0 \\ 0 & e2 \end{bmatrix}$`

$$\Lambda := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ortogonal substitutionsmatrix:

$$\text{> } Q := \langle v1|v2 \rangle$$

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Hvis determinanten er -1, ombyttes søjlerne i Q (og egenvektorerne ombyttes):

$$\text{> } \text{LinearAlgebra}[Determinant](Q)$$

1

(17)

> if LinearAlgebra[Determinant](Q) == -1 **then** Q := <v2|v1>; v := v2; v2 := v1; v1 := v; **end if**:

De gamle koordinater (x, y) erstattes nu af de nye koordinater (x₁, y₁)

I formlen $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$ **skal** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **erstattes af** $Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)^T \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot (Q^T \cdot H \cdot Q) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

Altså er vi sluppet af med det blandede 2. grads led, som hedder 2 · x · y

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1 + 13 =$$

$$3 \cdot (x_1^2 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x_1) + (y_1^2 - \sqrt{2} \cdot y_1) + 13 =$$

$$3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 \right) + 13 =$$

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot \left(\left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \right) + \left(\left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) + 13 = \\
 & 3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + 13 = \\
 & 3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 1 = \\
 & \left(\frac{x_1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{1} \right)^2 - 1
 \end{aligned}$$

Dvs. $f(x, y) = 0$ er en ellipse med halvakserne $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Som forventet giver $Q^T \cdot H \cdot Q$ diagonalmatricen Λ :

> $T(Q) \cdot H \cdot Q$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)

1. grads leddet udregnes:

> $[-8 \quad -10] \cdot Q$

$$[-9\sqrt{2} \quad -\sqrt{2}]$$

(19)

I den kvadratiske form: $[x \quad y] \cdot H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-8 \quad -10] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13$

erstattes de gamle koordinater (x, y) med nye koordinater (xI, yI) : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}$

> $T\left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) \cdot H \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) + [-8 \quad -10] \cdot \left(Q \cdot \begin{bmatrix} xI \\ yI \end{bmatrix}\right) + 13 = 0$

$$\left(\frac{3}{2} \sqrt{2} xI - \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} xI - \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) + \left(\frac{3}{2} \sqrt{2} xI$$

(20)

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} xI + \frac{1}{2} \sqrt{2} yI \right) - 9\sqrt{2} xI - \sqrt{2} yI + 13 = 0$$

> *simplify(%)*

$$3xI^2 + yI^2 - 9\sqrt{2} xI - \sqrt{2} yI + 13 = 0$$

(21)

> *Student[Precalculus][CompleteSquare](%)*

$$\left(yI - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 + 3 \left(xI - \frac{3}{2} \sqrt{2} \right)^2 - 1 = 0$$

(22)

Ellipsens centrum er $CI = (xI_0, yI_0) = \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right)$ i de nye koordinater!

I gamle koordinater ligger centrum i punktet $C = (1, 2)$:

$$> C := Q. \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

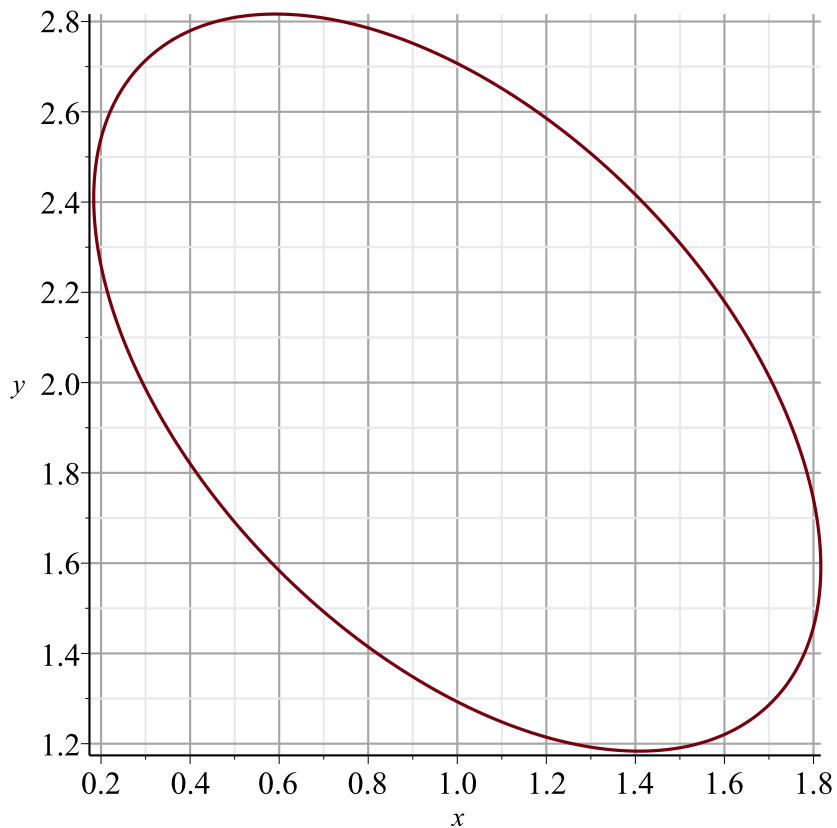
$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(23)

Ellipsen plottes:

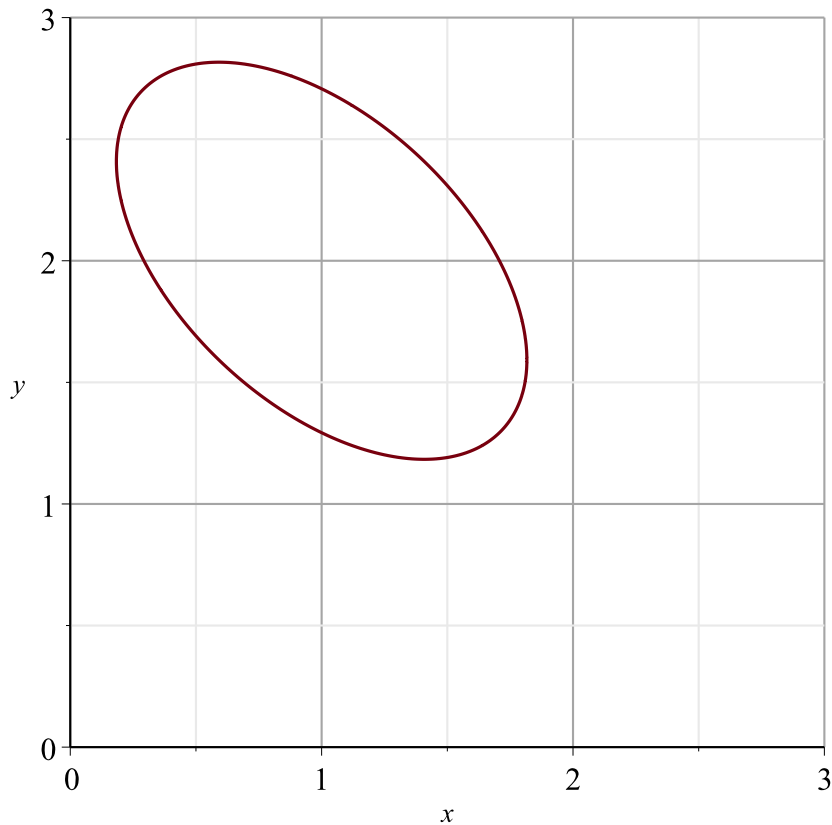
> *with(plots) :*

> *implicitplot(2·x² + 2·y² + 2·x·y - 8·x - 10·y + 13 = 0, x = 0 .. 2, y = 1 .. 3, numpoints = 100000, gridlines)*



Origo bør ses på plottet:

> *implicitplot(2·x² + 2·y² + 2·x·y - 8·x - 10·y + 13 = 0, x = 0 .. 2, y = 1 .. 3, numpoints = 100000, view = [0 .. 3, 0 .. 3], gridlines)*



Centrum ligger i $C = (1, 2)$.

Halvaksjerne går gennem centrum, og følger de nye koordinataksler!

Længden af halvaksjerne er fundet ovenfor som $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og 1.

Halvaksjerne tegnes med en parameterfremstilling for et ret linjestykke.

Ellipsen tegnes med centrum og halvaksjer:

```
> ellipse := implicitplot(2*x^2 + 2*y^2 + 2*x*y - 8*x - 10*y + 13 = 0, x=0..2, y=1..3, numpoints
    = 100000, color = red) :
centrum := pointplot([1], [2], symbolsize=20, symbol=solidcircle, color=black) :
lilleakse := plot([C1 + t*v1_1, C2 + t*v1_2, t=-sqrt(3)/3 .. sqrt(3)/3], color=blue) :
storakse := plot([C1 + t*v2_1, C2 + t*v2_2, t=-1..1], color=green) :
display(ellipse, centrum, storakse, lilleakse, view=[0..3, 0..3], gridlines)
```

