TURNING TORSO

Fakta vedr. Turning Torso, Malmø

Omtale på relevante website:

en.wikipedia.org/wiki/Turning_Torso

sv.wikipedia.org/wiki/Turning_Torso

www.turningtorso.se

Fakta

(fundet på ovenstående links):

Højde = 190.4 m
Etager = 54
Areal = 400 m^2, dvs. grundareal er et **kvadrat** med siden 20 m
Drejning pr. etage = 1.6 grader

```
> restart
> with(plots) :
```

VektorAnalyse-pakken fra Steen Toft Jørgensen rummer Karsten Schmidts rutiner:

```
> with(VektorAnalyse)
```

$$[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop] \quad (1.1)$$

Integrator8-pakken fra Steen Markvorsen rummer gode integrations- og plotnings-rutiner:

```
> with(Integrator8) :
```

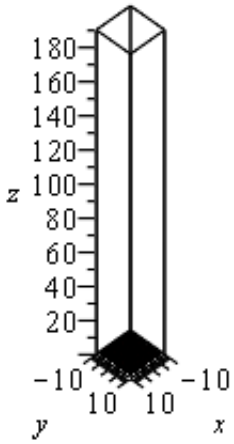
Grundfladen af tårnet

Parametrisering af grundfladen, hvor $-10 \le s \le 10$ og $-10 \le t \le 10$ (20 m på hver led):

```
> grundflade := (s, t) → ⟨s, t, 0⟩ : grundflade(s, t)
```

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

```
> plot3d(grundflade(s, t), s = -10 ..10, t = -10 ..10, axes = box, labels = [x, y, z], view = [ -10
      ..10, -10 ..10, 0 ..190.4 ], scaling = constrained, numpoints = 10000, caption
      = "grundflade", color = red)
```



grundflade

Grundfladen er et kvadrat med siderne 20 *m* og et areal på 400 m^2

Rumfang af det vredne tårn

Rotationsmatrix i 3. dimensioner: en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

> $R3 := \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R3 := \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1)}$$

Rotering af grundfladen med vinklen v om z-aksen:

> $R3.grundflade(s, t)$

$$\begin{bmatrix} \cos(v)\ s - \sin(v)\ t \\ \sin(v)\ s + \cos(v)\ t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

Drejningsvinklen er bestemt ved: på 190.4 *m* vil kvadratet på de 454 etager dreje 54·1.6 grader:

```
> 54·1.6
```

$$86.4 \quad \textbf{(3.3)}$$

Mon ikke det skal være præcist 90°?
Så jeg antager, at drejningen er præcist 90° på de 54 etager.

Dvs. $v = 90 \cdot \frac{h}{190.4}$ grader $= 90 \cdot \frac{h}{190.4} \cdot \frac{\pi}{180}$ radianer

NB: Vridningen laves, så kanten kommer udenfor grundfalden, idet der roteres omkring origo.
Opgave til dig: implementér andre måder at rotere på!

```
> v := 90·h/190.4·π/180
```

$$v := 0.002626050420\ h\ \pi \quad \textbf{(3.4)}$$

Parametrisering af den rummelige Torso, hvor $-10 \le s \le 10$, $-10 \le t \le 10$ og $0 \le h \le 190.4$

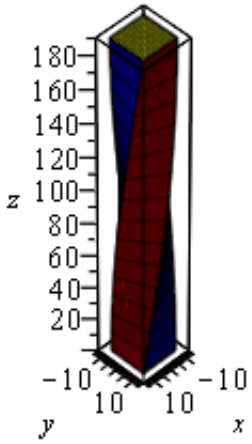
```
> rumTorso := unapply(R3.grundflade(s, t) + ⟨0, 0, h⟩, s, t, h) : rumTorso(s, t, h)
```

$$\begin{bmatrix} \cos(0.002626050420\ h\ \pi)\ s - \sin(0.002626050420\ h\ \pi)\ t \\ \sin(0.002626050420\ h\ \pi)\ s + \cos(0.002626050420\ h\ \pi)\ t \\ h \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.5)}$$

```
> parametreRum := [-10, 10, -10, 10, 0, 190.4] :
> parametreNet := [10, 10, 10] :
```

Tårnet tegnes med *sideFlader* fra Integrator8-pakken:

```
> plotTorso := sideFlader(rumTorso, parametreRum, parametreNet) :
> display(plotTorso, axes = box, labels = [x, y, z], caption = "Turning Torso")
```



Turning Torso

Rumfang beregnet med *rumIntGo* fra Integrator8-pakken:

> *TorsoRumfang* := *rumIntGo*(*rumTorso*, *parametreRum*, 1)

TorsoRumfang := 76160.0 **(3.6)**

Rumfang beregnet med metoden fra Matematik 1:

$$\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v,w) = \left|\left(\mathbf{r}'_u(u,v,w)\times\mathbf{r}'_v(u,v,w)\right)\cdot\mathbf{r}'_w(u,v,w)\right|$$

$$\mathrm{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1\,d\mu = \int_h^l\int_c^d\int_a^b \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

Formlerne med gul baggrund implementeres:

> *rumJacobi* := *simplify*(*prik*(*kryds*(*diff*~(*rumTorso*(*s*, *t*, *h*), *s*), *diff*~(*rumTorso*(*s*, *t*, *h*), *t*)), *diff*~(*rumTorso*(*s*, *t*, *h*), *h*)))

rumJacobi := 1 **(3.7)**

> $TorsoRumfang := \int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\int_{0}^{190.4} rumJacobi \, dh \, ds \, dt$

$$TorsoRumfang := 76160. \quad \textbf{(3.8)}$$

Sammenligning med den **intuitive formel** for rumfanget (*grundareal*·*højden*):

> $400 \cdot 190.4$

$$76160.0 \quad \textbf{(3.9)}$$

NB: Forestil dig, at Turning Torso består af en hel masser vandrette skiver.
Når de drejes fra sædvanlige rette position til den vredne position, vil det ikke påvirke rumfanget!

rumJacobi giver 1, så rumfanget er uændret pga. vridningen på 90°.

Rumfanget af Turning Torso bygningen er således 76160 m^3

Areal af én af de 4 vredne sideflader

Parametrisering af sidekant, hvor $-10 \le s \le 10$:

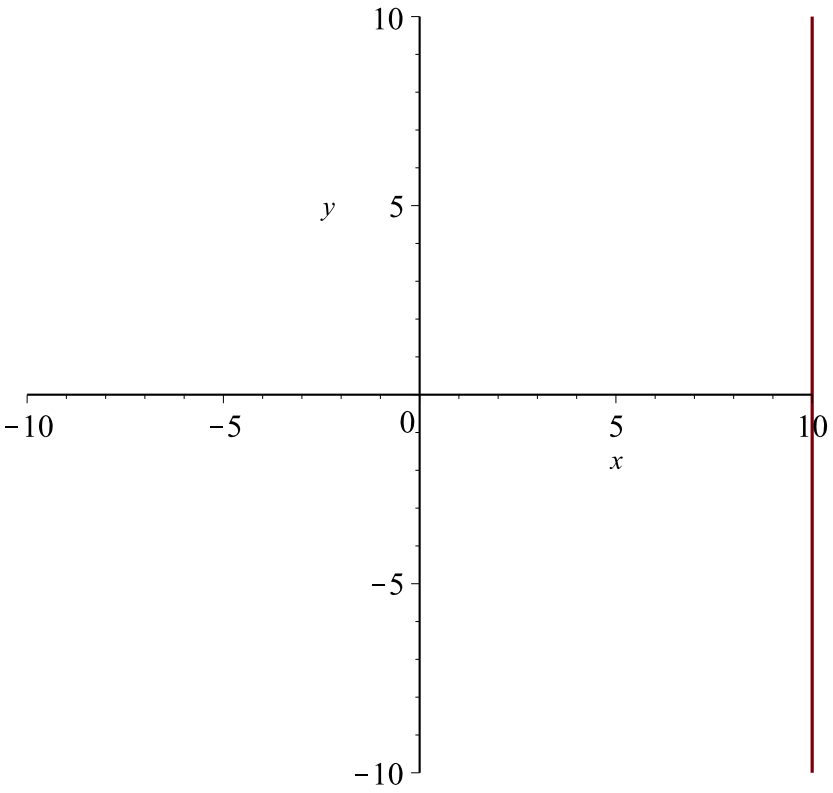
> $sidekantTorso := s \to \langle 10, s, 0 \rangle : sidekantTorso(s)$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

> $sidekantTorso(s)[1]$

$$10 \quad \textbf{(4.2)}$$

> $plot([sidekantTorso(s)[1], sidekantTorso(s)[2], s = -10..10], labels = [x, y], view = [-10..10, -10..10], caption = \text{"Sidekant i grundfladen"})$



Sidekant i grundfladen

Sidekanten roteres med vinklen v om z-aksen.

Parametrisering af en sideflade, hvor $-10 \le s \le 10$ og $0 \le h \le 190.4$

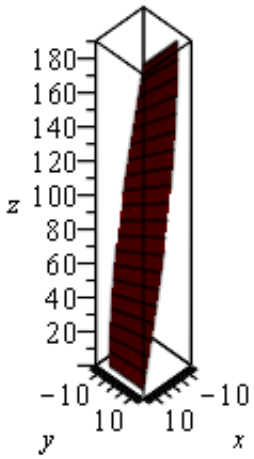
> $TorsoSideflade := unapply(R3.sidekantTorso(s) + \langle 0, 0, h\rangle, s, h) : TorsoSideflade(s, h)$

$$\begin{bmatrix} 10\cos(0.002626050420\,h\,\pi) - \sin(0.002626050420\,h\,\pi)\,s \\ 10\sin(0.002626050420\,h\,\pi) + \cos(0.002626050420\,h\,\pi)\,s \\ h \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3)}$$

> $parametreFlade := [-10, 10, 0, 190.4]$:

NB: Bemærk, at view er nødt til at være større end -10..10 i x- og y-retningen, ellers ser man ikke det hele.
Når grundfladen drejer, vil den komme uden for -10..10 området fra grundfladen.

> $plot3d(TorsoSideflade(s, h), s = -10..10, h = 0..190.4, axes = box, view = [-14..14, -14..14, 0..190.4], scaling = constrained, labels = [x, y, z], numpoints = 10000, caption = "Vredet sideflade", color = red)$



Vredet sideflade

Areal beregnet med *fladeIntGo* fra Integrator8-pakken:

> *TorsoSidefladeAreal* := *fladeIntGo*(*TorsoSideflade*, *parametreFlade*, 1)

TorsoSidefladeAreal := 3812.315281 **(4.4)**

Areal beregnet med metoden fra Matematik 1:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v) = |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|$$

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1\, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u,v)\, du\, dv$$

Formlerne med gul baggrund implementeres:

> $N := kryds(diff\sim(TorsoSideflade(s,h),s), diff\sim(TorsoSideflade(s,h),h))$

$N := [[\cos(0.002626050420\, h\, \pi)],$ **(4.5)**
$[\sin(0.002626050420\, h\, \pi)],$

$$[-\sin(0.002626050420\,h\,\pi)\,(0.02626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.002626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi)\,s) - \cos(0.002626050420\,h\,\pi)\,(-0.02626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.002626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi)\,s)]]$$

> $N := simplify(N)$

$$N := \begin{bmatrix} \cos(0.008249980709\,h) \\ \sin(0.008249980709\,h) \\ 0.008249980709\,s \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.6)}$$

> $fladeJacobi := simplify(\sqrt{prik(N, N)})$

$$fladeJacobi := \sqrt{1. + 0.00006806218170\,s^2} \quad \textbf{(4.7)}$$

NB: *fladeJacobi* afhænger kun af *s*, ikke af *h*!
Fornuftigt, da tranformationen er fuldstændig ens hele vejen op.

> $TorsoSidefladeAreal := \int_{-10}^{10}\int_{0}^{190.4} fladeJacobi\,dh\,ds$

$$TorsoSidefladeAreal := 3812.315280 \quad \textbf{(4.8)}$$

Integrationsrækkefølgen er (naturligvis) ligegyldig:

> $TorsoSidefladeAreal := \int_{0}^{190.4}\int_{-10}^{10} fladeJacobi\,ds\,dh$

$$TorsoSidefladeAreal := 3812.315281 \quad \textbf{(4.9)}$$

Sammenligning med den **intuitive formel** for arealet af én sideflade (*side·højden*):

> $20 \cdot 190.4$

$$3808.0 \quad \textbf{(4.10)}$$

Arealet af én sideflade er altså ca. 4.2 m^2 større end det, som den intuitive formel giver!

Arealet af én af de 4 sideflader af Turning Torso bygningen er således ca. 3812.3 m^2

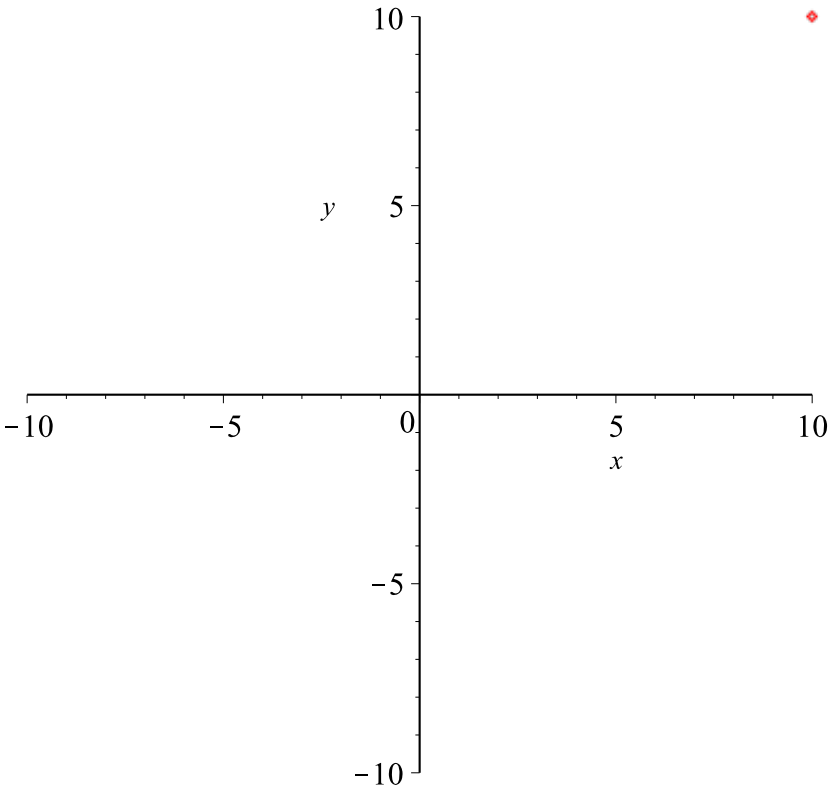
Længden af én af de 4 vredne kanter

Hjørnepunkt ved grundfladen:

> $hjørnepunkt := \langle 10, 10, 0 \rangle$

$$hjørnepunkt := \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1)}$$

> $pointplot([hjørnepunkt[1], hjørnepunkt[2]], labels = [x, y], view = [-10..10, -10..10], color = red, caption = "Hjørnepunkt")$



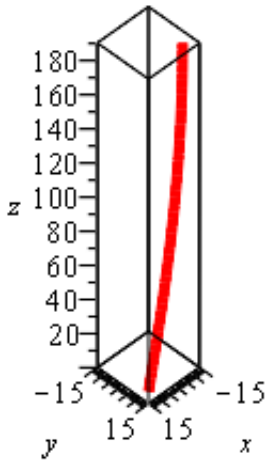
Hjørnepunkt

Hjørnepunktet drejes med højden h.
Det giver parametriseringen, hvor $0 \le h \le 190.4$

```
> TorsoVredetKant := unapply(R3.hjørnepunkt + ⟨0, 0, h⟩, h) : TorsoVredetKant(h)
```

$$\begin{bmatrix} 10\cos(0.002626050420\,h\,\pi) - 10\sin(0.002626050420\,h\,\pi) \\ 10\sin(0.002626050420\,h\,\pi) + 10\cos(0.002626050420\,h\,\pi) \\ h \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.2)}$$

```
> spacecurve(TorsoVredetKant(h), h = 0..190.4, thickness = 5, axes = box, labels = [x, y, z],
    scaling = constrained, view = [-15..15, -15..15, 0..190.4], color = red, caption
    = "Vredet kant")
```



Vredet kant

Længden beregnet med *kurveIntGo* fra Integrator8-pakken:

> *parametreKant* := [0, 190.4]

parametreKant := [0, 190.4] **(5.3)**

> *LængdeVredetKant* := *kurveIntGo*(*TorsoVredetKant*, *parametreKant*, 1)

LængdeVredetKant := 191.6915236 **(5.4)**

Længden beregnet med metoden fra Matematik 1:

$$\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)|$$

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \, \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) \, du$$

Formlerne med gul baggrund implementeres:

```
> N := diff~(TorsoVredetKant(h), h)
```

$$N := \left[\left[-0.02626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.02626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi)\right],\left[0.02626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.02626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi)\right],\left[1\right]\right] \quad \textbf{(5.5)}$$

```
> kurveJacobi := sqrt(prik(N, N))
```

$$kurveJacobi := \left(1 + \left(-0.02626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.02626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi)\right)^2 + \left(0.02626050420\,\pi\cos(0.002626050420\,h\,\pi) - 0.02626050420\,\pi\sin(0.002626050420\,h\,\pi)\right)^2\right)^{1/2} \quad \textbf{(5.6)}$$

```
> simplify(kurveJacobi)
```

$$1.006783212 \quad \textbf{(5.7)}$$

Ikke underligt, at *kurveJacobi* er konstant. Vridningen på 90° sker jo med jævn fart!

```
> LængdeVredetKant := int(kurveJacobi, h = 0 .. 190.4)
```

$$LængdeVredetKant := 191.6915236 \quad \textbf{(5.8)}$$

```
> LængdeVredetKant - 190.4
```

$$1.2915236 \quad \textbf{(5.9)}$$

Sammenligning med den **intuitive højde** på 190.4, så er længden af den vredne kant er ca. 1.3 m længere!

Længden af én af de 4 vredne kanter af Turning Torso bygningen er således ca. 191.7 *m*