Opgave 3a LilleDag uge 6

Opgave 3 Omdrejningslegemer. Parametrisering og intergral

Et profilområde P i (x,z)-planen i rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathrm{s}(u,v) = (u, 0, v(1-u))\,;\, u \in [0;1]\,, v \in [0;1]\,.$$

a) Angiv en parameterfremstilling for det omdrejningslegeme Ω der fremkommer når profilområdet drejes vinklen 2π omkring z-aksen. Hvilket geometrisk objekt er der tale om?

b) Bestem rumfanget af omdrejningslegemet.

a)

Prameterfremstillingen vil blive udledt systematisk.
Der vil blive fremstillet 3 plots, som illustrerer parameterfremstillingerne af kurve, plant område og rumligt område.

```
> restart
> with(plots) :
```

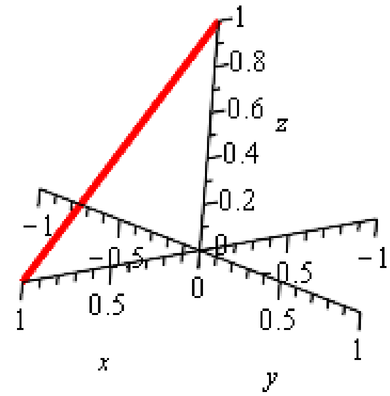
Udgangspunkt er **en ret linje i xz-planen**, som har denne parameterfremstilling, hvor $u \in [0; 1]$:

```
> l := u → ⟨u, 0, 1 − u⟩ :
> 'l(u)'=l(u)
```

$$l(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 1-u \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Den rette linje indtegnes i 3D:

```
> linje := spacecurve(l(u), u = 0 ..1, axes = normal, labels = [x, y, z], thickness = 3, view = [ -1
      ..1, -1 ..1, 0 ..1 ], color = red, numpoints = 1000, scaling = constrained) :
> display(linje)
```



Profilområde i xz-planen dannes ved at udfylde området fra linjen ned til x-aksen.
Området har denne parameterfremstilling, hvor $u \in [0;1]$ og $v \in [0;1]$:

> $s := (u, v, w) \rightarrow \langle u, 0, v \cdot (1 - u) \rangle$:

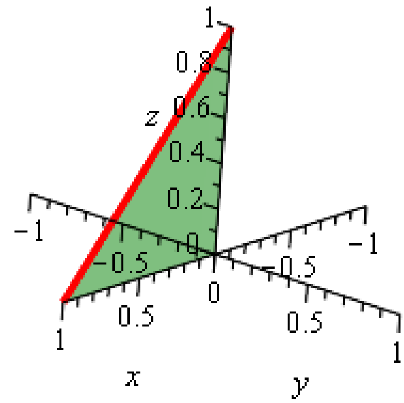
> $'s(u, v, w)' = s(u, v, w)$

$$s(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v\,(1 - u) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Profilområdet tegnes i 3D:

> trekant := $plot3d(s(u, v, 0), u = 0..1, v = 0..1, axes = normal, labels = [x, y, z], style = patchnogrid, color = green, transparency = 0.5, view = [-1..1, -1..1, 0..1])$:

> $display(linje, trekant)$



Rotationsmatrix ved rotation om z-aksen:
http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#In_three_dimensions

> $Rz := w \to \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

> $'Rz(w)' = Rz(w)$

$$Rz(w) = \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3)}$$

Drejningen om z-aksen af profilområdet danner en kegle.
Keglens parameterfremstilling, hvor $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$ og $w \in [0; 2 \cdot \pi]$:

> $r := (u, v, w) \to Rz(w).s(u, v, w)$:

> $'r(u, v, w)' = r(u, v, w)$

(1.4)

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} \cos(w)\, u \\ \sin(w)\, u \\ v\,(1-u) \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

Konklusion: keglens parameterfremstilling er givet ved $\underline{\underline{\langle \cos(w)\cdot u\,, \sin(w)\cdot u\,, v\cdot(1-u)\rangle}}$ hvor $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$ og $w \in [0; 2\cdot\pi]$

> $B := [0, 1, 0, 1, 0, 2\cdot\pi]$

$$B := [0, 1, 0, 1, 0, 2\,\pi] \qquad (1.5)$$

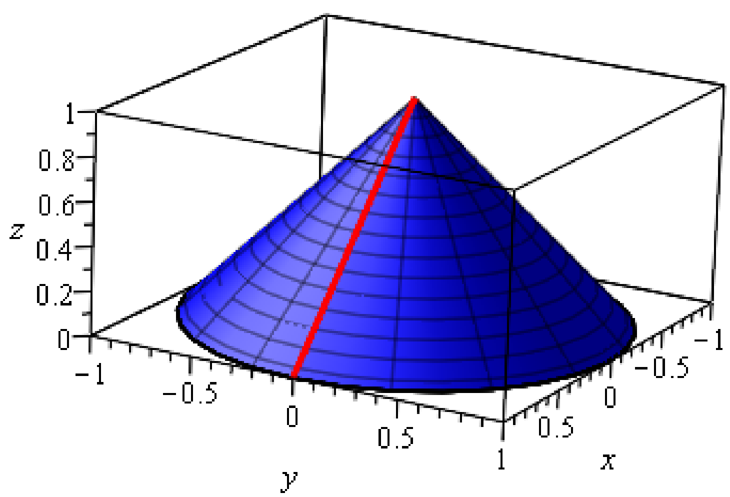
> $net := [10, 10, 10]$

$$net := [10, 10, 10] \qquad (1.6)$$

Keglen tegnes i 3D:

> $kegle := Integrator8[sideFlader](r, B, net)$:

> $display(linje, kegle, labels = [x, y, z], axes = box)$



b)

Rumfanget bestemmes på 2 måder.
Med Jacobi-metoden fra eNoterne, og med Integrator8-pakken.

Jacobi-metoden

> $Jacobi := simplify(|LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](r(u, v, w), [u, v, w]))|)$

$$Jacobi := |u\ (u-1)| \quad \textbf{(2.1.1)}$$

> $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\cdot\pi} 1 \cdot Jacobi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$

$$\frac{1}{3}\pi \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Intergrator8-pakken

> $Integrator8[rumIntGo](r, B, 1)$

$$\frac{1}{3}\pi \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Konklusion: rumfanget af keglen er $\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$

NB: **rumfanget af en kegle** kan bestemmes med formlen: $\frac{1}{3} \cdot A \cdot h$, hvor A = bundareal og h = højden.
http://en.wikipedia.org/wiki/Cone#Volume

Her er $h = 1$ og bundarealet $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Dvs rumfanget bliver $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$.