Epidemier: SIR-modellen

Epidemimodellen

Lad os betragte en befolkning af størrelsen N, hvor en sygdom hos visse individer i befolkningen udbreder sig til en større del af befolkningen ved smitte mellem de syge og de raske. Vi deler befolkningen i tre grupper nemlig de raske ($R(t)$), de syge ($S(t)$) og de immune ($I(t)$), hvor de tre størrelser opfattes som funktioner af tiden. En rask person kan ved smitte blive syg og efter helbredelse blive immun. De immune er altså personer, som har været syge og som ikke kan blive syge igen. Vi antager, at alle syge personer med tiden vil blive immune, og at ingen dør af sygdommen. Befolkningens størrelse er altså uændret under denne epidemi.

Modellen, der beskriver udviklingen af sygdommen, er som følgende:

$R'(t) = -k \cdot R(t) \cdot S(t)$

$S'(t) = k \cdot R(t) \cdot S(t) - h \cdot S(t)$

$I'(t) = h \cdot S(t)$

$k, h > 0$

Konstanten k kaldes for smittefrekvensen, mens h kaldes helbredelsesraten. Af ovenstående sam-

```
> restart
> with(plots) :
```

Pas på bogstavforvirringen!

Dansk: *r = raske, s = syge, i = immune*

Engelsk: $s = susceptible\ (raske),\ i = infected,\ r = recovered$

Her anvendes DANSK notation

> $DR := r'(t) = -k \cdot r(t) \cdot s(t);$
> $DS := s'(t) = k \cdot r(t) \cdot s(t) - h \cdot s(t);$
> $DI := i'(t) = h \cdot s(t)$

$$DR := \mathrm{D}(r)(t) = -k\, r(t)\, s(t)$$
$$DS := \mathrm{D}(s)(t) = k\, r(t)\, s(t) - h\, s(t)$$
$$DI := \mathrm{D}(i)(t) = h\, s(t) \qquad \textbf{(1)}$$

> $BI := i(0) = 0;$
> $BR := r(0) = 1;$
> $BS := s(0) = \frac{1}{1000}$

$$BI := i(0) = 0$$
$$BR := r(0) = 1$$
$$BS := s(0) = \frac{1}{1000} \qquad \textbf{(2)}$$

> $h := 0.5;\ k := 1$

$$h := 0.5$$
$$k := 1 \qquad \textbf{(3)}$$

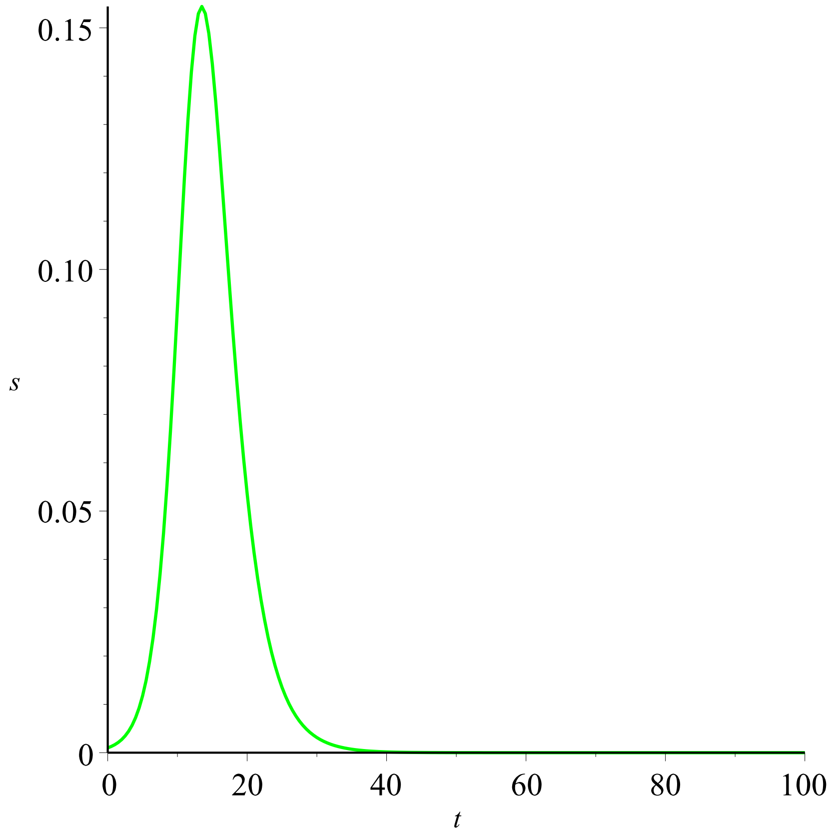
> $dsolve(\{DR, DS, DI\})$

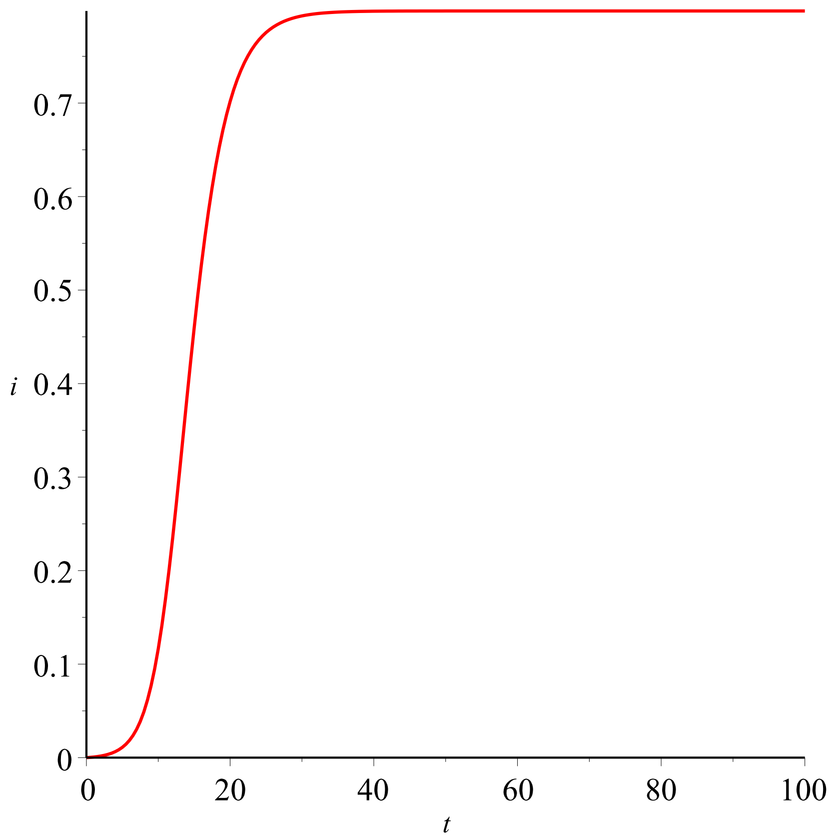
$$[\{s(t) = 0\}, \{r(t) = \_C2\}, \{i(t) = \_C1\}], \left[\left\{s(t) = RootOf\left(-\left(\int^{\_Z} \left(-\frac{2}{\_a\left(\mathrm{LambertW}\left(-\_C2\,(\mathrm{e}^{\_a})^2\,\mathrm{e}^{-1}\right)+1\right)}\right) \mathrm{d}\_a\right) + t + \_C3\right)\right\}, \left\{r(t) = \frac{1}{2}\,\frac{s(t) + 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t)\right)}{s(t)}\right\}, \left\{i(t) = \int \frac{1}{2}\, s(t)\, \mathrm{d}t + \_C1\right\}\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Differentialligningssystemet kan IKKE løses analytisk (eksakt).
Det må løses numerisk (tilnærmet).

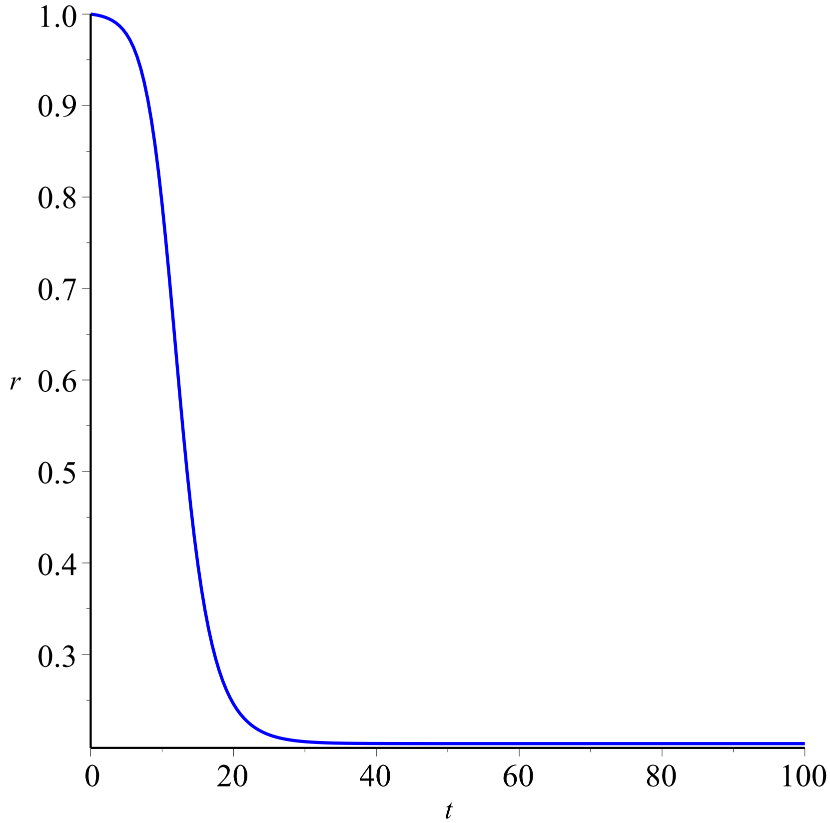
> $løsning := dsolve(\{DR, DS, DI, BR, BS, BI\}, numeric) :$

> $odeplot(løsning, [t, s(t)], t = 0..100, color = green);$
> $odeplot(løsning, [t, i(t)], t = 0..100, color = red);$
> $odeplot(løsning, [t, r(t)], t = 0..100, color = blue)$


0.15
0.10
0.05
0
s
0
20
40
60
80
100
t

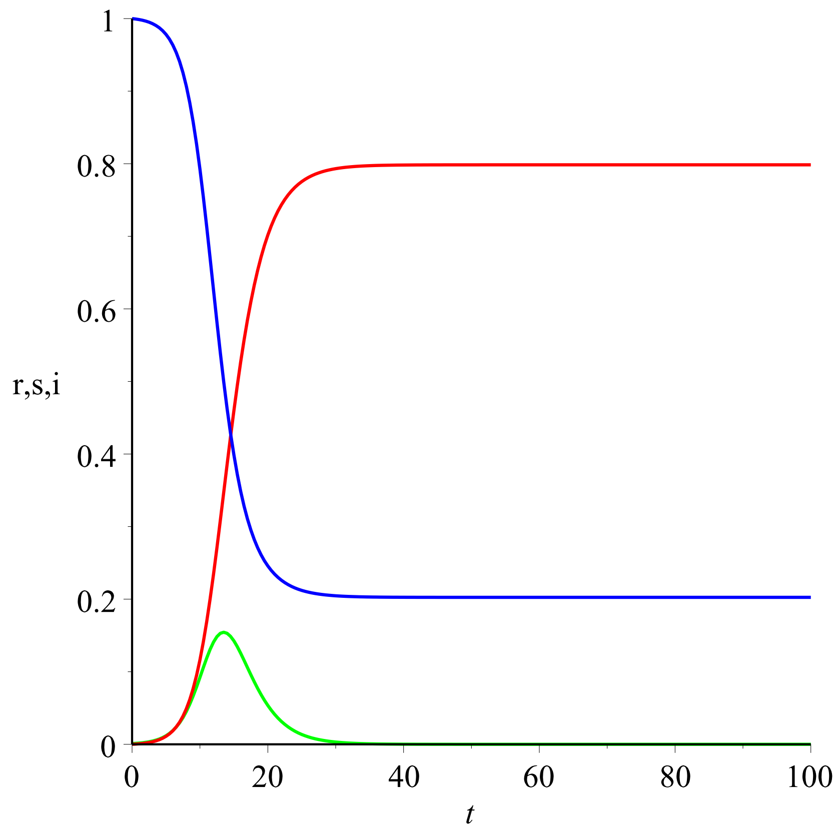


0.7
0.6
0.5
i
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
20
40
60
80
100
t



> $plotS := odeplot(løsning, [t, s(t)], t = 0 ..100, color = green)$:
> $plotI := odeplot(løsning, [t, i(t)], t = 0 ..100, color = red)$:
> $plotR := odeplot(løsning, [t, r(t)], t = 0 ..100, color = blue)$:

> $display(plotS, plotI, plotR, labels = [t, \text{"r,s,i"}])$


r,s,i
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
20
40
60
80
100