Coulomb-feltet

> $restart$

> $with(VektorAnalyse2)$

$$[div, grad, kryds, prik, rot, vekdif, vop] \quad (1.1)$$

> $V := (x, y, z) \rightarrow \frac{\langle x, y, z\rangle}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$:'$V(x, y, z)$'$= V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Cylinder givet ved: $z \in [-h, h]$ og $\rho \in [0, a]$ og $\varphi \in [0, 2\cdot\pi]$

> $assume(a > 0, h > 0); assume(v, real); assume(u, real); interface(showassumed = 0)$:

Parametrisering af **den massive cylinder**, hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2\cdot\pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r := (u, v, w) \rightarrow \langle u\cdot\sin(v), u\cdot\cos(v), w\rangle$:'$r(u, v, w)$'$= r(u, v, w)$

$$r(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Vælger $a = 2$ og $h = 1$, så der kan tegnes:

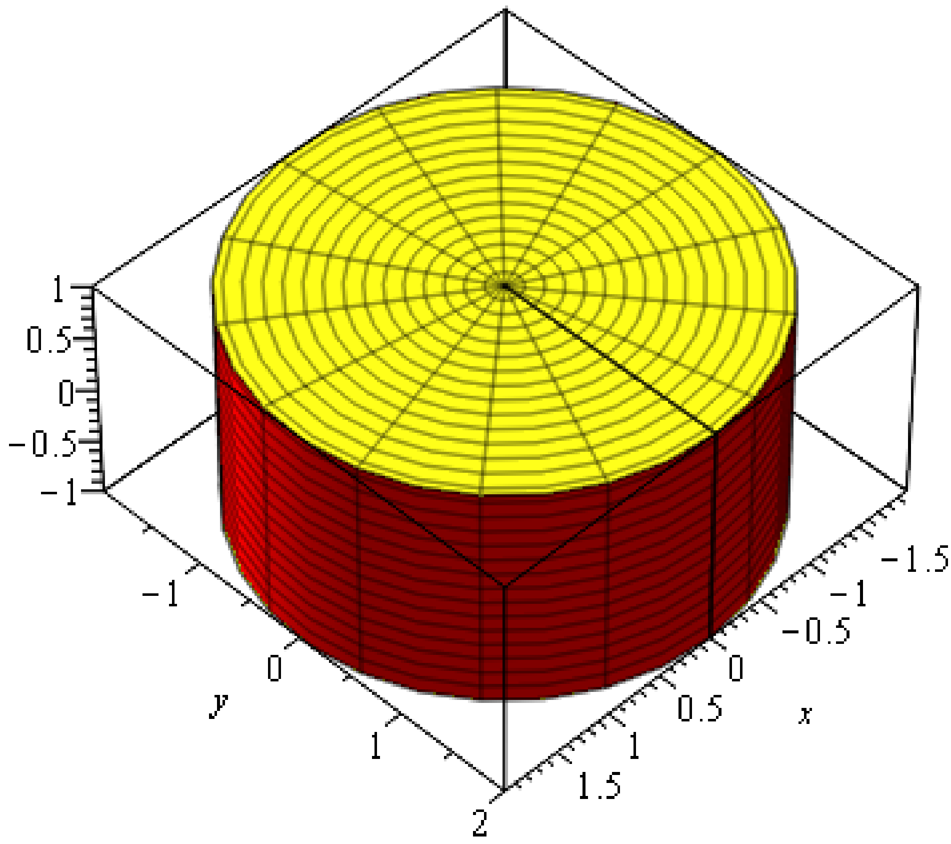
> $B := [0, 2, 0, 2\cdot\pi, -1, 1]$

$$B := [0, 2, 0, 2\,\pi, -1, 1] \quad (1.4)$$

> $net := [10, 10, 10]$

$$net := [10, 10, 10] \quad (1.5)$$

> $plot1 := Integrator8[sideFlader](r, B, net)$:
$plots[display](plot1, axes = box, labels = [x, y, z])$



a) Divergensen

> $div(V)(x, y, z)$

$$-\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

> $simplify(\%)$

$$0 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Dvs. divergensen af V er 0. **Dog ikke defineret i origo!**

b) Fluxen

Integralet af divergensen over cylinderen er 0, da divergensen er 0.

MEN. Der er jo en **singularitet** i origo, og da origo ligger inde i cylinderen, så kan **Gauss' sætning IKKE anvendes**!

Forklaring: i Gauss' sætning er det en forudsætning, at vektorfeltet V er glat, dvs. differentiabel overalt. Derfor skal den også være defineret overalt.

Parametrisering af cylinderens **krumme del**, hvor $v \in [0, 2\cdot\pi]$ og $w \in [-h, h]$:

> $r1 := (v, w) \to \langle a\cdot\cos(v), a\cdot\sin(v), w\rangle$:'$r1(v, w)$'$= r1(v, w)$

$$r1(v, w) = \begin{bmatrix} a\cos(v) \\ a\sin(v) \\ w \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

> $diff\sim(r1(v, w), v)$

$$\begin{bmatrix} -a\sin(v) \\ a\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

> $diff\sim(r1(v, w), w)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

> $N := diff\sim(r1(v, w), v) \times diff\sim(r1(v, w), w)$

$$N := \begin{bmatrix} a\cos(v) \\ a\sin(v) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

> $Integrand1 := N \bullet V(vop(r1(v, w)))$

$$Integrand1 := \frac{a^2\cos(v)^2}{\left(a^2\cos(v)^2 + a^2\sin(v)^2 + w^2\right)^{3/2}} + \frac{a^2\sin(v)^2}{\left(a^2\cos(v)^2 + a^2\sin(v)^2 + w^2\right)^{3/2}} \tag{1.2.5}$$

> $Flux1 := \int_0^{2\cdot\pi}\left(\int_{-h}^{h} Integrand1 \, \mathrm{d}w\right) \mathrm{d}v$

$$Flux1 := \frac{4\,h\,\pi}{\sqrt{a^2 + h^2}} \tag{1.2.6}$$

Parametrisering af **endeflader** (cirkel), hvor $u \in [0, a]$ og $v \in [0, 2\cdot\pi]$:

> $r2 := (u, v) \to \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), h\rangle$:'$r2(u, v)$'$= r2(u, v)$; #TOP;
> $r3 := (u, v) \to \langle u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), -h\rangle$:'$r3(u, v)$'$= r3(u, v)$;#BUND

$$r2(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ h \end{bmatrix}$$

(1.2.7)

$$r3(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ -h \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.7)}$$

Normalvektoren til *r1* skal gå opad, normalevektoren til *r2* skal gå nedad. Så går de begge UD af cylinderen!

> $N2 := simplify(diff\sim(r2(u, v), u) \times diff\sim(r2(u, v), v));$
> $N3 := -simplify(diff\sim(r3(u, v), u) \times diff\sim(r3(u, v), v))$

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$N3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.8)}$$

> $Integrand2 := N2 \cdot V(vop(r2(u, v)));$
> $Integrand3 := N3 \cdot V(vop(r3(u, v)));$

$$Integrand2 := \frac{u\,h}{\left(u^2\cos(v)^2 + u^2\sin(v)^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

$$Integrand3 := \frac{u\,h}{\left(u^2\cos(v)^2 + u^2\sin(v)^2 + h^2\right)^{3/2}} \quad \textbf{(1.2.9)}$$

> $Flux2 := \int_0^a \left(\int_0^{2\cdot\pi} Integrand2 \,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u;$
> $Flux3 := \int_0^a \left(\int_0^{2\cdot\pi} Integrand3 \,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u$

$$Flux2 := -\frac{2\,\pi\left(\left(a^2+h^2\right)^{3/2} h - a^4 - 2\,a^2\,h^2 - h^4\right)}{a^4 + 2\,a^2\,h^2 + h^4}$$

$$Flux3 := -\frac{2\,\pi\left(\left(a^2+h^2\right)^{3/2} h - a^4 - 2\,a^2\,h^2 - h^4\right)}{a^4 + 2\,a^2\,h^2 + h^4} \quad \textbf{(1.2.10)}$$

> $Flux := Flux1 + Flux2 + Flux3$

$$Flux := \frac{4\,h\,\pi}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{4\,\pi\left(\left(a^2+h^2\right)^{3/2} h - a^4 - 2\,a^2\,h^2 - h^4\right)}{a^4 + 2\,a^2\,h^2 + h^4} \quad \textbf{(1.2.11)}$$

> $simplify(\%)$

$$4\,\pi \quad \textbf{(1.2.12)}$$

Fluxen ud gennem cylinderen er givet ved $\underline{\underline{4\cdot\pi}}$

NB: uafhængig af parametrene a og h !

Fysikken

Coulombs lov siger, at **kraften** fra en ladning Q på en lille ladning q er:

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot q \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

hvor $\vec{r}$ er vektoren imellem de 2 ladninger. Placeres Q i origo, er $\vec{r}$ stedvektoren til q.
ε_0 kaldes vacuumpermitiviteten.

Man definerer den **elektriske feltstørrelse** $\vec{E}$ ved: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, altså som kraften pr. ladningsenhed.

Dvs. $\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

Gauss' sætning giver så, at det ortogonale fladeintegral af $\vec{E}$ over enhver lukket flade, som indeholder ladningen Q $= \int_{flade} \vec{E} \bullet d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

NB: Hvis fladen ikke indeslutter nogen ladning, så bliver svaret 0.

Se formlen blandt **Maxwells ligninger** til beskrivelse af **elektromagnetisme**:
http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations#Conventional_formulation_in_SI_units

Lad os teste det med en kugleskal med centrum i origo.
Så er $\vec{E} \perp$ fladen, og $|\vec{E}|$ er konstant.
Derfor bliver fluxen ud gennem kugleskallen

$$= |\vec{E}| \cdot KugleskalAreal = \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{|\vec{r}|}{r^3} \right) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

I opgave 5 ovenfor var vektorfeltet $V(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, dvs.

$$V = \frac{\vec{E}}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot V$$

Vi fandt ved udregning, at fluxen af V ud gennem cylinderen er: $4 \cdot \pi$.
Fluxen af $\vec{E}$ ud gennem cylinderen er så: $\left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \right) \cdot (4 \cdot \pi) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, hvilket passer med sætningen!