Kinetisk energi for en partikel

Opgaven er en kommentar til **opgave 7** fra semesteruge 1, foråret 2016, store dag.

Formlen for *kinetisk energi* lyder, når der regnes *relativistisk*:

$$E_{kin}(v) = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right), \quad 0 \le v < c,$$

Formlen kan også skrives:

$E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$, hvor m_0 er hvilemassen, og $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ er massen, når partiklen bevæger sig med farten v.

Klassiske formel for kinetisk energi

Taylorudvikling af funktionen:

> restart

> $Ekin := v \rightarrow m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$

$$Ekin := v \rightarrow m_0\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \tag{1.1}$$

> $taylor(Ekin(v), v = 0, 20)$

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0}{c^2} v^4 + \frac{5}{16} \frac{m_0}{c^4} v^6 + \frac{35}{128} \frac{m_0}{c^6} v^8 + \frac{63}{256} \frac{m_0}{c^8} v^{10} + \frac{231}{1024} \frac{m_0}{c^{10}} v^{12} + \frac{429}{2048} \frac{m_0}{c^{12}} v^{14} + \frac{6435}{32768} \frac{m_0}{c^{14}} v^{16} + \frac{12155}{65536} \frac{m_0}{c^{16}} v^{18} + \mathrm{O}(v^{20}) \tag{1.2}$$

> $taylor(Ekin(v), v = 0, 4)$

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathrm{O}(v^4) \tag{1.3}$$

> $mtaylor(Ekin(v), v = 0, 4)$

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{1.4}$$

Konklusion: Den klassiske formel for kinetisk energi $\underline{\underline{E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2}}$ er altså Taylor-polynomiet af 3. grad til den relativistiske formel.

Hvor god er så approksimationen?

Som man kan se af Taylor-udviklingen ovenfor, så er alle led positive, dvs. fejlen vokser når v

vokser.
Antag at $v \leq 10\ \%\ af\ c$, dvs. $v \leq 0.1 \cdot c$
Den maksimale fejl findes derfor, når $v = 0.1 \cdot c$
Fejlen skal nu beregnes:

> $MaxFejlAbsolut := Ekin(0.1 \cdot c) - \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot (0.1 \cdot c)^2$

$$MaxFejlAbsolut := 0.000037815000\, m_0\, c^2 \tag{2.1}$$

> $MaxfejlProcent1 := \frac{MaxFejlAbsolut}{Ekin(0.1 \cdot c)} \cdot 100$

$$MaxfejlProcent1 := 0.7506230380 \tag{2.2}$$

> $MaxfejlProcent2 := \frac{MaxFejlAbsolut}{\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot (0.1 \cdot c)^2} \cdot 100$

$$MaxfejlProcent2 := 0.7563000000 \tag{2.3}$$

Konklusion: Når $v \leq 10\ \%$ af c, vil man maksimalt lave en fejl på godt $\frac{3}{4}\,\%$, hvis man anvender den klassiske formel for kinetisk energi (frem for den relativistiske).
NB: Fejlens størrelse i procent er uafhængig af massen.